

СЕРІЯ «БІБЛІОТЕКА ЖУРНАЛУ
"МАТЕМАТИКА В ШКОЛАХ УКРАЇНИ"»

$$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$
$$S = \pi r^2$$

II

УСНІ ВПРАВИ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ



ОСНОВА
ЗНАЙОМІСТЬ

$$(a-b)^2 = |b-a|^2$$

Белешко Д.Т., Віднічук М.А., Крайчук О.В.

УСНІ ВПРАВИ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Изд. группа «Основа»

2015

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72
У 74

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-9093 від 13 червня 2014 р.)

Рецензенти:

Власюк А.П. – доктор технічних наук, професор
(Міжнародний економіко-гуманітарний університет),
Войтович І.С. – доктор педагогічних наук, професор
(Рівненський державний гуманітарний університет),
Тадеев П.О. – доктор педагогічних наук, професор
(Національний університет водного господарства та
природокористування).

У 74 Усні вправи зі стереометрії : навч. посіб. / Д. Т. Белешко, М. А. Віднічук, О. В. Крайчук. – Х. : Изд. группа «Основа», 2015. – 111 с., [1] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2(146)).

ISBN 978-617-000-2319-3

У навчальному посібнику наведені усні вправи, які сприяють кращому засвоєнню курсу стереометрії в профільній школі, розвивають в учнів уважність, спостережливість, ініціативу, підвищують дисципліну і збуджують інтерес до роботи з математики.

Для учнів та вчителів загальноосвітніх навчальних закладів, студентів-математиків педагогічних університетів.

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72
У 74

ISBN 978-617-000-2319-3

© Белешко Д.Т., Віднічук М.А., Крайчук О.В., 2015
© ООО Издательская группа «Основа», 2015

Зміст

Вступ.....	4
Приклади міркувань при розв'язуванні задач на доведення.....	7
Розділ 1. Усні вправи із стереометрії для учнів 10 класу.....	10
Вправи на визначення рівня розвитку просторових уявлень учнів.....	10
Аксіоми стереометрії.....	12
Паралельність прямих і площин.....	18
Перпендикулярність прямих і площин.....	23
Декартові координати і вектори у просторі.....	32
Закріплення матеріалу до Розділу 1.....	43
Розділ 2. Усні вправи із стереометрії для учнів 11 класу.....	54
Призма.....	54
Піраміда.....	71
Циліндр.....	93
Конус.....	99
Куля.....	106
Закріплення матеріалу до Розділу 2.....	112
Вказівки до розв'язування та відповіді до вибраних задач.....	119

Вступ

Особливості змісту програми по стереометрії спричиняють необхідність удосконалення форм і методів навчання для того, щоб забезпечити в учнів: розвиток образного, зокрема просторового, мислення; розвиток логічного мислення; формування розуміння відношень між геометричними об'єктами та об'єктами реального світу, вміння застосовувати геометрію для розв'язування практичних задач.

Усні вправи є одним із випробуваних засобів, які сприяють кращому засвоєнню курсу стереометрії в профільній школі. Вони розвивають в учнів уважність, спостережливість, ініціативу, підвищують дисципліну і збуджують інтерес до роботи. За їх допомогою вчитель встановлює на уроці оперативний і ефективний зворотний зв'язок, який дозволяє своєчасно контролювати процес оволодіння учнями геометричними знаннями і вміннями. Такі вправи дають можливість без великих затрат часу багаторазово «програвати» типові ситуації і прийоми міркувань, систематично підвищувати рівень просторових уявлень учнів, проводити роботу з формування їх логічної і мовної культури.

Своєчасно і вміло поставлене вчителем запитання допомагає уникнути проявів формалізму у навчанні, дає можливість зосереджувати увагу учнів на допущених помилках. Дуже потрібні усні вправи і при повторенні навчального матеріалу.

У даному навчальному посібнику містяться запитання і вправи, що охоплюють усі теми курсу стереометрії загальноосвітньої школи.

Під час практичного використання матеріалу корисно мати на увазі такі методичні рекомендації:

1. Добір вправ до уроку потрібно здійснювати, виходячи з навчально-виховної мети, яку ставить перед собою вчитель, з урахуванням реальних можливостей учнів і наявності часу для цього. Зовсім не обов'язково домагатися розгляду в класі всіх запитань і задач, які наведені в даному посібнику. Інколи доцільно використати завдання, придумані самим вчителем.

2. Вправи, наведені в даному посібнику, мають різну методичну спрямованість. Значна кількість запитань і задач може бути використана при фронтальній роботі на уроці (перед поясненням нового матеріалу чи після нього, під час опитування і перевірки домашнього завдання, під час повторення).

Деякі завдання призначені для індивідуального опитування, їх використовують як основні чи додаткові запитання (з урахуванням здібностей і можливостей учня, якого опитують).

Серед вправ є такі, які доступні лише найбільш здібним учням. Їх не слід пропонувати всім учням.

3. Форми використання матеріалу задач на уроках необхідно урізноманітнювати. Виправдовують себе, зокрема, такі прийоми: усне повідомлення змісту вправи; проектування умови задачі на екран; використання завдань на картках або таблицях; постановка задачі на моделях або предметах навколишнього оточення; математичний диктант та ін. При цьому можна широко використовувати мультимедійні засоби навчання.

В усіх випадках потрібно максимально стимулювати мислення школярів, підводити їх до необхідності співставляти, порівнювати, класифікувати, узагальнювати, конкретизувати, критично відноситися до тверджень і їх формулювань та ін.

4. Протягом всього періоду навчання треба вимагати від учнів повних і обґрунтованих відповідей на кожне із поставлених запитань. Увага до формування логічної і мовної культури учнів повинна бути постійною, а вимоги – неперервно зростати.

У деяких задачах виникає необхідність провести короткі письмові обчислення чи побудови. Бажано, щоб ці дії не забирали багато часу, зокрема всі побудови краще виконувати від руки.

5. На усні вправи протягом уроку треба відводити в середньому 6-8 хвилин. Деякі із запитань можна використовувати для домашнього завдання, а також при проведенні короткочасних усних контрольних робіт і заліків з окремих тем.

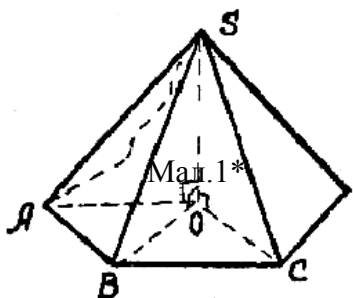
6. У кожному класі виділено два спеціальні розділи: повторення матеріалу попереднього навчального року і повторення матеріалу даного класу.

Вважаємо, що вчитель підійде до використання вправ із цих розділів творчо, використовуючи їх у міру необхідності протягом усього навчального року.

Приклади міркувань при розв'язуванні задач на доведення

Задача 1*. Довести: для того, щоб піраміда була правильною, необхідно й достатньо, щоб її основою був правильний многокутник і бічні ребра мали рівні довжини.

Доведення. Достатність. Дано, що основа піраміди – правильний многокутник і довжини бічних ребер рівні. Відповідно до означення правильної піраміди потрібно довести, що вершина піраміди проектується в центр її основи.



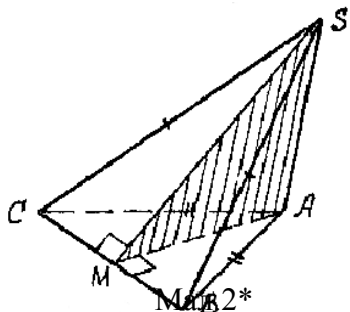
Нехай SO – висота піраміди (мал.1*), тобто $SO \perp AB$. $O \in ABC$. Тоді $\angle SOA = \angle SOB = \dots = 90^\circ$ (за означенням перпендикулярних прямої та площини). Позначимо $H = |SO|$, l – довжина бічного ребра. Із прямокутних трикутників SOA , SOB , ... знаходимо

$|AO| = |BO| = \dots = \sqrt{l^2 - H^2}$. Отже, точка O рівновіддалена від всіх вершин основи, а тому є центром основи. Цим довели, що піраміда – правильна.

Необхідність. Дано, що піраміда правильна, а потрібно довести рівність довжин бічних ребер.

У правильній піраміді основа O висоти SO є центром основи піраміди, тому $|AO| = |BO| = \dots = R$, де R – радіус описаного навколо основи кола. Із прямокутних трикутників SOA , SOB , ... знаходимо $|SA| = |SB| = \dots = \sqrt{H^2 + R^2}$. Отже, бічні ребра піраміди мають рівні довжини. Необхідність доведена.

Наслідок. Правильний тетраедр є правильною пірамідою, за основу можна прийняти будь-яку його грань.



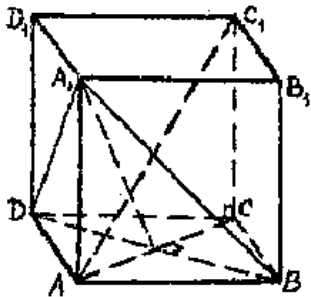
Задача 2*. У піраміді $SABC$ $|AB| = |AC|$ і $|SB| = |SC|$. Довести, що ребра SA і BC перпендикулярні.

Доведення. Оскільки $\triangle ABC$ та $\triangle SBC$ рівнобедрені, їхні висоти із S і A

проходять через середину M відрізка BC , тобто $SM \perp BC$, $AM \perp BC$. (мал.2*). Звідси, відповідно до ознаки перпендикулярності прямої і площини, випливає, що $BP \perp SMA$. А із цього, із визначення перпендикулярності прямої та площини, випливає, що $BC \perp SA$.

Наслідок. У правильній трикутній піраміді протилежні ребра перпендикулярні.

Задача 3*. Довести, що діагональ куба перпендикулярна діагоналі грані куба, яка не перетинається з нею.



Мал.3*

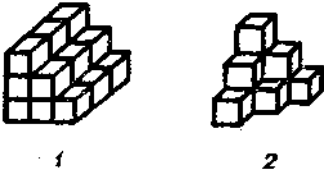
Доведення. Розглянемо, наприклад, діагоналі AC_1 і BD (мал. 3). Оскільки $CC_1 \perp ABCD$, AC – проекція AC_1 на площину $ABCD$. Грань $ABCD$ – квадрат, тому $BD \perp AC$ і отже, $BD \perp AC_1$ (за теоремою про три перпендикуляри).

Наслідок. Діагональ куба перпендикулярна площині, яка проведена через кінці трьох ребер куба, що виходять із тієї ж вершини, що й діагональ (на мал.3* $AC_1 \perp BD$, $AC_1 \perp BA_1$, тому $AC_1 \perp BA_1D$).

Відзначимо, що в кубі, як і в будь-якому паралелепіпеді, діагональ AC_1 проходить через точку перетину медіан $\triangle BA_1D$ і розділена нею у відношенні 1:2, рахуючи від вершини A . В кубі $\triangle BA_1D$ – рівносторонній, тому точка перетину медіан – його центр.

Розділ 1. Усні вправи із стереометрії для учнів 10 класу
Вправи на визначення рівня розвитку просторових уявлень учнів
Задачі на дослідження

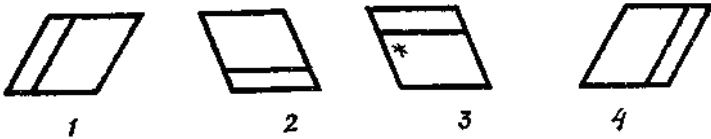
1. Із скількох кубиків складені фігури, зображені на мал.1?



Мал. 1

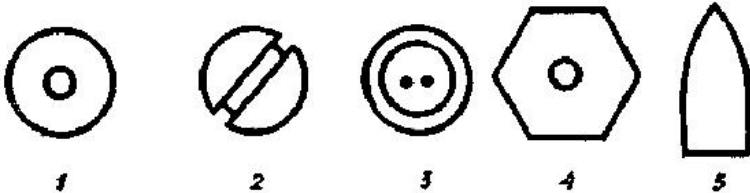
але в різних
 «зірочка» у кожній фігурі?

2. На мал.2
 зображено одну й ту саму фігуру,
 положеннях. Де повинна стояти



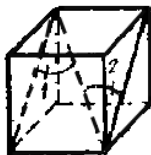
Мал. 2

3. Зображення яких добре відомих вам предметів розміщені на мал.3? (Олівець, шуруп, штепсель, утюг.)



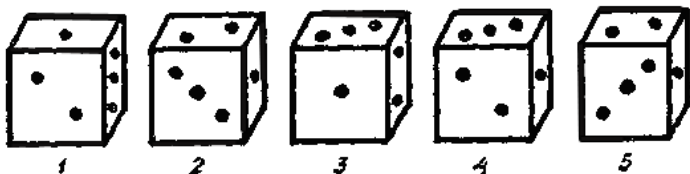
Мал. 3

4. На мал.4 зображено куб. Чи правильно, що $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 4

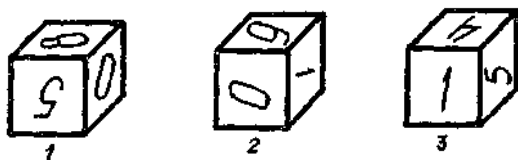
5. Які з кубиків на мал.5 відрізняються від першого тільки розміщенням у просторі?



Мал. 5

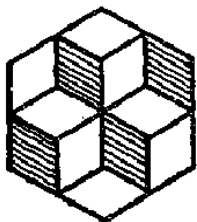
6. На гранях куба написані цифри 0, 1, 4, 5, 6, 8 (мал.6). Визначіть, які цифри написані на протилежних гранях куба за його малюнками в трьох положеннях у просторі.

7. (Жарт.) Що зображено на мал.7: один кубик зверху і два –

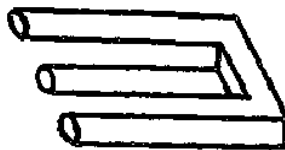


Мал. 6

внизу чи два – зверху, а один – внизу?



Мал. 7



Мал. 8

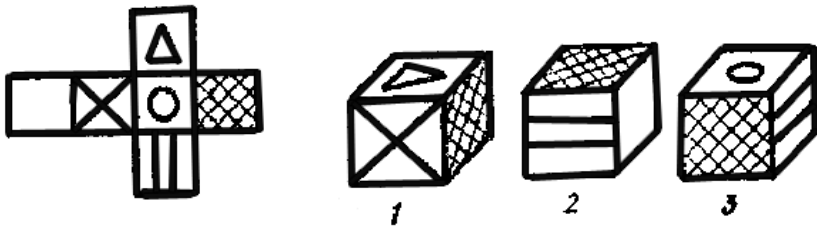
8. (Жарт.) Учень А придумав новий фізичний прилад – «магніт з трьома полюсами» (мал.8). Чи немає у вас зауважень до підготовленого ним «проекту»?

9. Які з фігур на мал.9 є розгортками куба?



Мал. 9

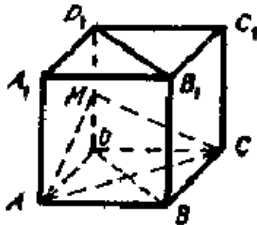
10. Чи є на мал.10 куб, який виготовлено за даною розгорткою?



Аксіоми стереометрії Мал. 10

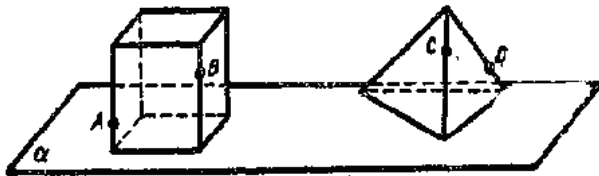
Задачі на побудову

11. На мал.11 зображено куб. Побудуйте пряму, по якій перетинаються площини AMC і BB_1D_1D .



Мал.11

12. Побудуйте (мал.12) точку перетину з площиною прямих AB і CD (фігури «стоять» на площині α).



Мал.12

Задачі на доведення

13. Доведіть, що дві прямі у просторі не можуть перетинатися більш ніж в одній точці.

14. Дано дві прямі, але через них не можна провести площину. Доведіть, що ці прямі не перетинаються.

15. Доведіть, що коли пряма не лежить на площині, то вона не може мати з цією площиною двох або більше спільних точок.

Задачі на дослідження

16. Чи однакові за змістом такі висловлення: «площини α і β перетинаються» і «площини α і β мають спільну точку»?

17. Поясніть, що означають такі висловлення: «можна провести площину», «можна провести не більше однієї площини», «площина

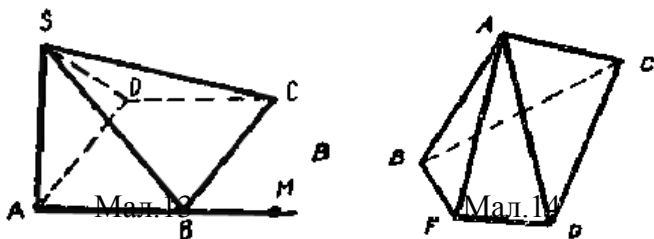
визначена», «площина невизначена».

18. Чи відрізняються за змістом такі висловлення: «кожна пряма площини», «яка-небудь пряма площини»?

19. Які з висловлень мають той самий зміст, а які – різний: «існує точка», «існує одна точка», «існує не менше ніж одна точка», «існує хоча б одна точка», «існує тільки одна точка», «існує не більш ніж одна точка»?

20. Для чого потрібна аксіома «Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй»? Адже цю властивість має довільна фігура: завжди є точки, які їй належать і які їй не належать. Чи правильні ці міркування?

21. Чому в аксіомі «Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку» не сказано, що пряма, по якій перетинаються дві площини, які мають спільну точку, обов'язково проходить через цю точку?



22. Чи лежить точка M на площині SAB ; на площині SBC (мал.13)? Чи перетинаються площини SAC і $ABCD$? Якщо так, то по якій прямій?

23. Чи можна побудувати на мал.14 пряму перетину площин ABC і ADF ; ABF і ACD ? Як?

24. Через три точки можна провести площину, але не одну. Що звідси випливає? Відповідь поясніть.

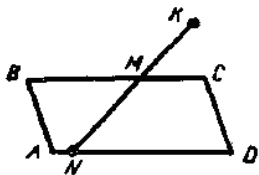
25. Через пряму і точку можна провести більше ніж одну площину. Що звідси випливає?

26. Чому замкнені двері відчинити неможливо, а незамкнені – легко відчинити?

27. Кожна з площин α і β проходить через точки A , B і C . Чи можна зробити висновок, що α і β – одна й та сама площина?

28. (Жарт.) О 9 год. з поверхні стола злетіли три мухи. Чи можна твердити, що о 12 год. вони знову будуть на одній площині?

29. Чи належить точка K площині паралелограма $ABCD$ (мал.15), якщо точка N належить відрізку AD , а точка M – відрізку BC ?



Мал.15

середини
площини.

даного трикутника? Чому?

31. Три вершини паралелограма лежать в деякій площині. Чи можна твердити, що і четверта вершина паралелограма лежить у тій самій площині? Чому?

32. Чи існує пряма, розбита на дві півпрямі так, що одна півпряма лежить у площині α , а друга – у площині β ? Відповідь проілюструйте малюнком.

33. До теореми «Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині» сформулюйте обернену. Чи стверджується вона?

34. Стіл з чотирма ніжками, який стоїть на рівній підлозі, інколи хитається, а стіл з трьома ніжками завжди стоїть стійко. Як пояснити цей факт?

35. Чи однаковий зміст мають твердження: «Прямі a і b лежать в різних площинах» і «Прямі a і b не належать одній площині»?

36. Чи правильні твердження?

1) Якщо коло має з площиною дві спільні точки, то всі точки цього кола лежать на даній площині.

2) Якщо дві точки і центр кола лежать на площині, то всі точки кола належать цій площині.

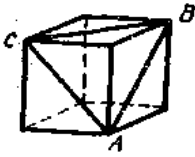
37. Покажіть в оточенні два прямих кути із спільною стороною, але які не є суміжними.

38. Як із 6 сірників скласти 4 рівносторонніх трикутники? Ламати сірники не можна.

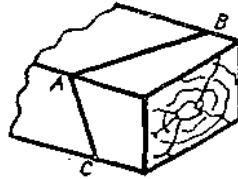
39. Столяр перевіряє, чи лежать кінці ніжок стільця в одній площині, за допомогою двох ниток. Як це робиться? Чи достатня така перевірка?

40. На мал.16 зображено куб. Знайдіть кути трикутника ABC .

30. Через сторін трикутника проведено Чи відрізняється вона від площини



Мал.16



Мал.17

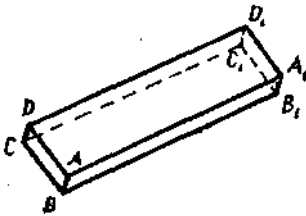
41. Тесляреві треба розпилити брусок пилюкою (мал.17). Для цього він прокреслює по двох суміжних гранях бруска відрізки AB і AC , а потім розпилує так, щоб полотно пилки йшло по цих відрізках. Як пояснити дії тесляра?

42. Перевіряючи плоскість грані, столяр дивиться, чи проходить промінь по її поверхні. На чому ґрунтується така перевірка? Чи достатня вона?

43. Як перевірити рівність поверхні стола за допомогою лінійки?

44. Як перевірити правильність виготовлення лінійки за допомогою відполірованої плоскої плити?

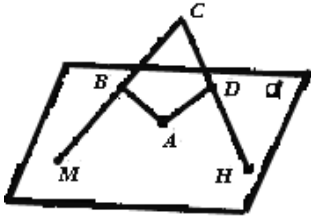
45. Щоб зробити лінійку, столяр ретельно вистругує рубанком (мал.18) її грані AA_1D_1D , BB_1C_1C , AA_1B_1B . Тоді ребра AA_1 і BB_1 будуть відрізками прямих. На чому це ґрунтується?



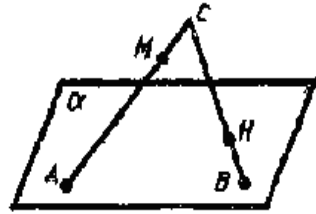
Мал. 18

46. Три точки у просторі розміщені так, що через них можна провести не менше 100 різних площин. Що можна сказати про ці точки?

47. Чи може пряма перетинати дві сторони трикутника і не лежати у площині цього трикутника?



Мал.19



Мал.20

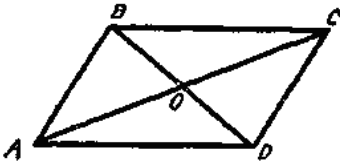
48. Вершина A опуклого чотирикутника $ABCD$ належить площині α , а інші вершини – ні. Сторони BC і CD продовжено до перетину з площиною α відповідно у точках M і H (мал.19). Чи правильний цей малюнок?

49. На мал.20 точки A та B лежать на площині α , а точка C – ні. На відрізках AC і BC взято відповідно точки M і H . Як побудувати точку перетину прямої MH з площиною α ?

Паралельність прямих і площин

Задачі на побудову

50. Паралелограм $ABCD$ (мал.21) є зображенням квадрата. Як побудувати зображення перпендикулярів, які проведені з точки O до сторін квадрата?



Мал.21

51. Паралелограм $ABCD$ є зображенням ромба з кутом A , який дорівнює 60° . Як побудувати зображення висоти ромба, проведеної з вершини B ?

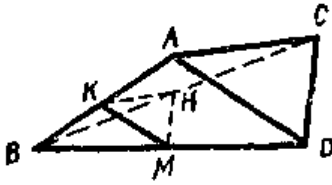
52. Дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом при вершині C . Як побудувати зображення перпендикулярів, проведених з точки M сторони AB на сторони AC і BC трикутника?

Задачі на доведення

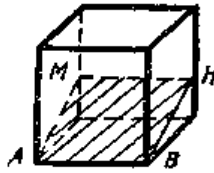
53. Дано $BK=KA$, $BM=MD$, $BH=HC$ (мал.22). Доведіть, що площина KMH паралельна площині ACD .

54. У кубі (мал.23) проведено переріз. Доведіть, що $MH \parallel AB$.

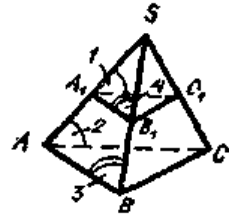
55. На мал.24 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $B_1C_1 \parallel BC$.



Мал.22



Мал.23



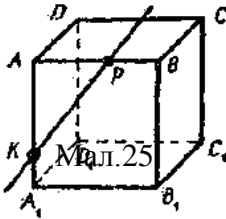
Мал.24

Задачі на дослідження

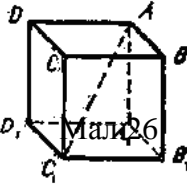
56. Як розміщені між собою осі залізничних вагонів відносно рейок?

57. Користуючись мал. 25, знайдіть помилки в таблиці:

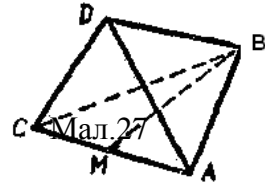
Прямі	AB	BB_1	A_1D_1
KP	перетинаються	мимобіжні	перетинаються
C_1A_1	мимобіжні	мимобіжні	перетинаються
C_1B_1	перетинаються	перетинаються	мимобіжні



58.]



Мал.26



Мал.27

а мал.25 пряма KP перетинає два ребра куба. Які з площин, зображених на малюнку, перетинає пряма KP ?

59. Чи перетинаються прямі: AC_1 і BB_1 (мал.26) і AO з BM (мал.27)? Поясніть.

60. Чи бачите ви на малюнках 26 і 27 просторові чотирикутники?

61. Що можна сказати про прямі a і b , якщо відомо, що вони не мимобіжні?

62. Як треба розуміти, що прямі a і b у просторі не паралельні?

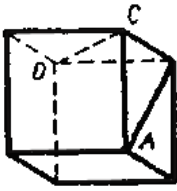
63. Чи правильне твердження: «Оскільки прямі a і b лежать у різних площинах і не перетинаються, то вони мимобіжні»?

64. На мал.28 зображено куб. Чи правильно, що $AB = CD$?

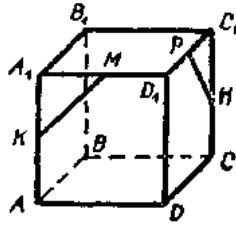
65. Точки K, M, P, H – середини ребер куба (мал.29). Чи перетинаються прямі KM і PH ?

66. Яке взаємне розміщення прямих AD_1 і A_1B (мал.30)?

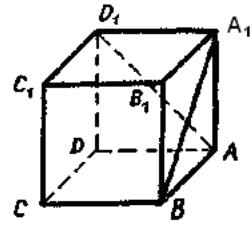
Відповідь поясніть.



Мал.28



Мал.29

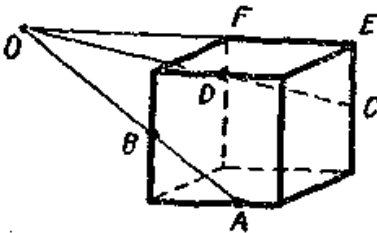


Мал.30

67. Щ

о можна сказати про прямі a і b , якщо відомо, що вони не перетинаються?

68. На мал.31 зображено куб і три прямі, які перетинаються в одній точці. Чи правильний цей малюнок?



Мал.31

«Якщо

69. Чи

справедливе твердження: пряма перетинає одну з паралельних прямих, то вона перетинає і другу» у

просторі? Відповідь проілюструйте на моделі.

70. Чи правильне твердження: «Якщо прямі a і b не паралельні одній і тій самій прямій c , то вони не паралельні між собою»?

71. Чи можуть паралельні прямі лежати відповідно на двох площинах, що перетинаються? Проілюструйте відповідь прикладом з оточення.

72. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через вершини A , C і D_1 проведемо площину. Чи буде лежати в цій площині пряма AA_1 ; пряма AD_1 ?

73. Пряма a паралельна площині α . Чи є на площині α прямі, які не паралельні прямій a ? Проілюструйте відповідь прикладом з оточення.

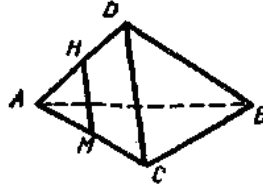
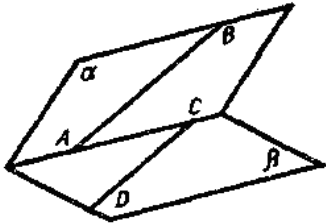
74. До теореми «Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну» сформулюйте обернену. Чи правильна вона?

75. Чи можливо, щоб пряма a була непаралельна площині α , але

на площині α були б прямі, паралельні a ?

76. Які треба мати відомості про пряму і площину, щоб зробити висновок, що вони не паралельні?

77. Чи правильне твердження: «Якщо дві прямі паралельні одній і тій самій площині, то вони паралельні між собою»?



78. На Мал.32 мал.32 прямі Мал.33 AB і CD лежать відповідно на двох площинах α і β , які перетинаються. Чи паралельні прямі AB і CD ?

79. MN – середня лінія трикутника ACD (мал.33). Знайдіть на малюнку площину, якій пряма MN паралельна.

80. Чи правильне міркування: «Точки A і B не лежать на площині α , причому відрізок AB не має з площиною спільних точок. Отже, пряма AB паралельна площині α »? Спробуйте відповісти без використання малюнка.

81. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через дану точку?

82. Чи може бути, що десять прямих площини α паралельні площині β , але площини α і β не паралельні? Відповідь проілюструйте малюнком.

83. Чи правильне твердження: «Дві площини, паралельні одній і тій самій прямій, паралельні між собою»?

84. Чи правильне таке означення: «Дві площини α і β називаються паралельними, якщо кожна пряма, яка лежить на площині α , не лежить на площині β »?

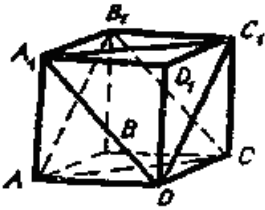
85. Чи може пряма мати спільну точку із однією з паралельних площин, але не перетинати другу площину?

86. Дві сторони трикутника паралельні деякій площині. Що можна сказати про третю сторону?

87. Чи можуть нерівні відрізки мати рівні паралельні проєкції?

88. Чи можуть рівні відрізки мати нерівні паралельні проєкції?

89. У кубі (мал.34) побудовано два перерізи: через точки A, B_1, C і через точки A_1, D, C_1 . Чи паралельні площини цих перерізів?



Мал.34

90. Чи може проекція бути більшою за відрізок, який проєкується?

91. Чи може паралельною проєкцією прямої бути відрізок?

92. Як розміщений у просторі відрізок відносно площини проєкції, якщо він проєкується в точку?

93. У якому випадку проєкція відрізка дорівнює самому відрізку?

94. Як розміщені у просторі два відрізки, якщо вони проєктуються в один і той самий відрізок?

95. Як розміщені дві прямі, коли їх проєкції на площину паралельні?

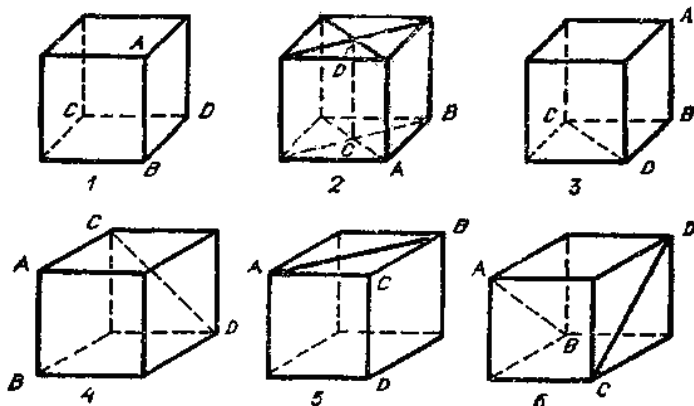
96. У якому випадку трикутник проєкується: 1) у відрізок прямої; 2) у трикутник, що йому дорівнює?

97. Чи є різниця між поняттями «паралельна проєкція фігури на площину» і «зображення фігури на площині»?

Перпендикулярність прямих і площин

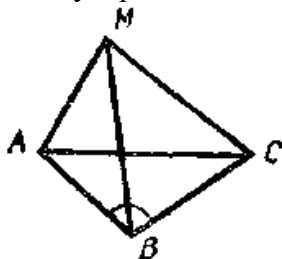
Задачі на обчислення

98. Ребро куба дорівнює a (мал.35). Яка відстань між прямими AB і CD ?



Мал.35
Задачі на побудову

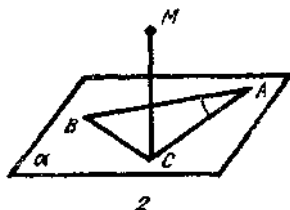
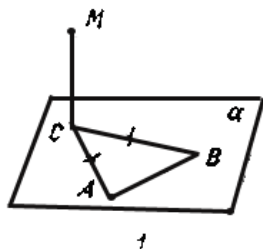
99. На мал.36 $\angle ABC=90^\circ$, $MA=MB=MC$. Опустіть з точки M перпендикуляр на площину ABC .

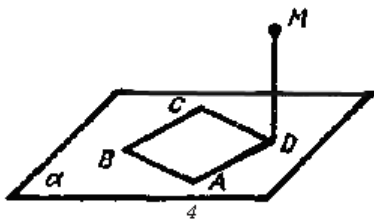
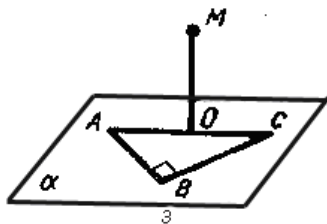


Мал.36

100. З точки M опустіть перпендикуляр на пряму AB (мал.37):

- 1) Дано: $MC \perp$ до площини ABC , $AC=BC$ (мал.37(1)).
- 2) Дано: $MC \perp$ до площини ABC , $\angle BAC=90^\circ$ (мал.37(2)).
- 3) Дано: $\angle ABC=90^\circ$, $AO=OC$. $MO \perp$ до площини ABC (мал.37(3)).
- 4) Дано: $ABCD$ – квадрат, $MD \perp$ до площини ABC (мал.37(4)).

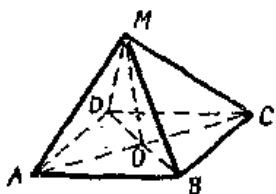




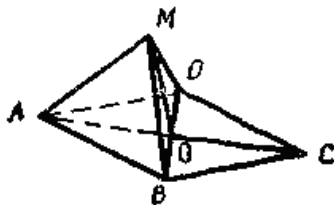
Мал.37

101. Назвіть в оточенні перпендикулярні площини. Відповідь поясніть.

Задачі на доведення



Мал.38

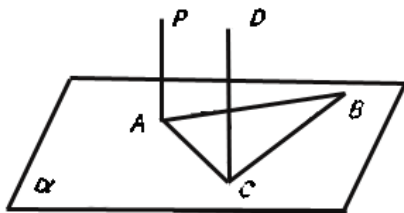


Мал.39

102. На мал.38 $ABCD$ – паралелограм, $MA=MC$, $MB=MD$. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини ABC .

103. $ABCD$ – квадрат, $MB=MD$ (мал.39). Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини MAO .

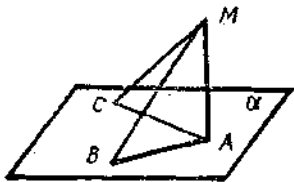
104. На мал.40 трикутник ABC лежить на площині α , $PA \perp AB$, $DC \perp BC$, $PA \parallel DC$. Доведіть, що прямі PA і OC перпендикулярні до площини α .



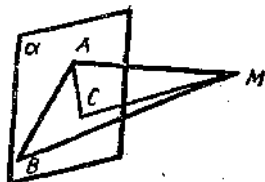
Мал.40

105. Точки A , B , C лежать на площині α (мал.41), $MA \perp \alpha$, $MB=MC$. Доведіть, що $AC=AB$.

106. На мал.42 точки A , B , C лежать на площині α , пряма MA перпендикулярна до площини α , $AB=AC$. Доведіть, що $MB=MC$.



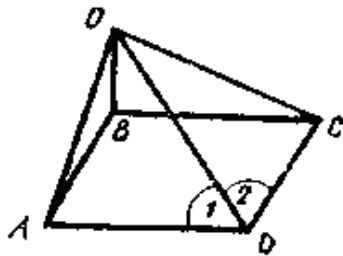
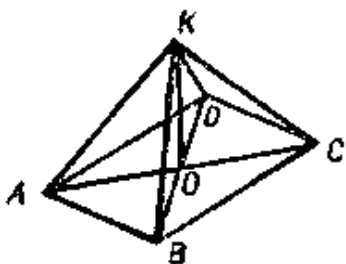
Мал.41



Мал.42

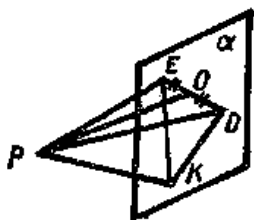
107. ABC – прямокутник (мал.43), пряма KO перпендикулярна до площини ABC , Доведіть, що $KA=KB=KC=KD$.

108. $ABCD$ – ромб, пряма OB перпендикулярна до площини ABC (мал.44). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



109. На мал.45 пряма PO перпендикулярна до площини DEK , $PE=PD=PK$, $OE=OD$. Доведіть, що $\angle DKE=90^\circ$.

110. Використайте теорему про три перпендикуляри (мал.46).



Мал.45

1) Дано: куб (мал.46(1)). Довести: $BC_1 \perp AB$.

2) Дано: $ABCB$ – ромб, $MA \perp$ до площини ABD (мал.46(2)). Довести: $MO \perp BD$.

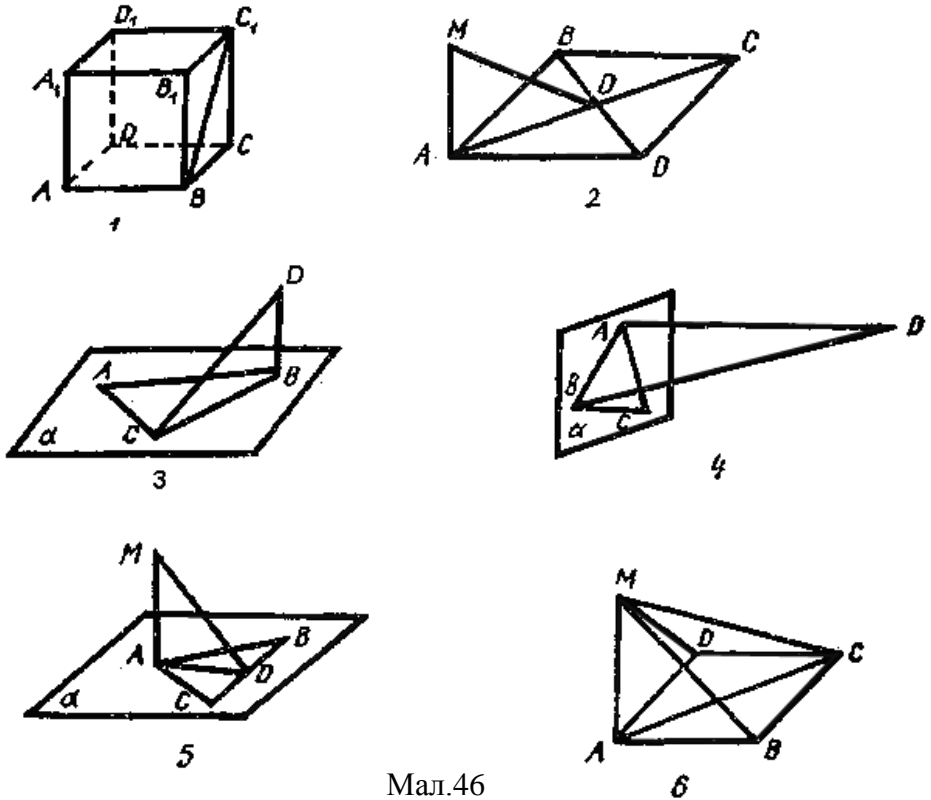
3) Дано: $\angle A=30^\circ$, $\angle ABC=60^\circ$, $BD \perp$ до площини α (мал.46(3)). Довести: $CD \perp AC$.

4) Дано: $\angle BAC=40^\circ$, $\angle ACB=50^\circ$, $AD \perp$ до площини α (мал.46(4)). Довести: $BC \perp BD$.

5) Дано: $MA \perp$ до площини α , $BD=CB$, $MO \perp BC$ (мал.46(5)).

Довести: $AB=AC$.

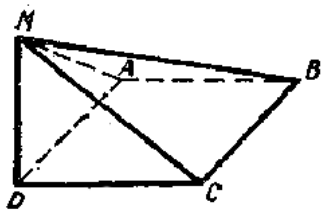
б) Дано: $ABCD$ – квадрат, $MA \perp$ до площини BCD (мал.46(б)).
Визначить, які з трикутників прямокутні.



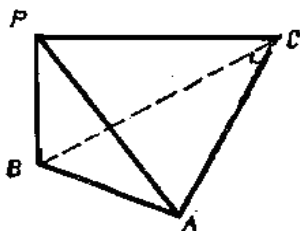
Мал.46

111. $ABCD$ – квадрат, пряма MD перпендикулярна до площини $ABCD$ (мал.47). Доведіть, що площина MAD перпендикулярна до площини MCD . Доведіть, що площина MBC перпендикулярна до площини MCD .

112. У трикутнику ABC $\angle C=90^\circ$, пряма PB перпендикулярна до площини ABC (мал.48). Доведіть, що площина PAC перпендикулярна до площини PBC .



Мал.47



Мал.48

Задачі на дослідження

113. Чи правильні у стереометрії такі твердження?

1) Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до цієї прямої.

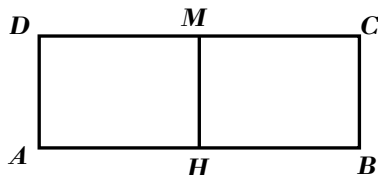
2) Прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні між собою.

3) Якщо пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного до цієї точки, то вона є дотичною до кола.

114. Чи правильне твердження «Якщо прямі, що перетинаються, не паралельні двом даним перпендикулярним прямим, то вони не перпендикулярні між собою»?

115. Назвіть в оточенні моделі прямих і площин, які перпендикулярні між собою.

116. Аркуш паперу прямокутної форми (мал.49) перегнули по середній лінії MH . Утворену фігуру розмістили на столі так, що на ньому опинилися точки A , B і H . Яке положення відносно площини стола займає пряма MH ?

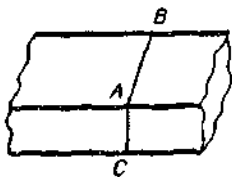


Мал.49

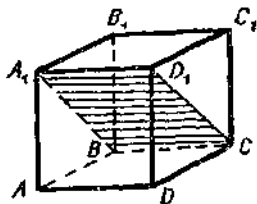
117. Що означає твердження: «Пряма не перпендикулярна до площини»?

118. Чи правильно, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої, яка лежить в цій площині?

119. Щоб розпил дерев'яного бруска (мал.50) був перпендикулярний до бруска, через точку A ребра проводять перпендикулярно до нього прямі AB і AC . Потім розпилюють так, щоб розпил йшов по цих прямих. Поясніть ці дії.

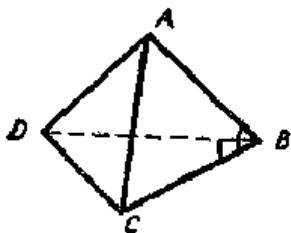


Мал.50



Мал.51

121. Чи є переріз куба, який зображений на мал.51, прямокутником?

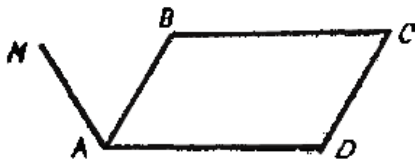


Мал.52

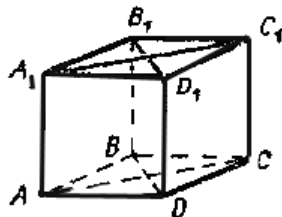
122. На мал.52 $\angle ABC=90^\circ$, $\angle DBC=90^\circ$. Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

123. На мал.53 $ABCD$ – прямокутник і $MA \perp AB$. Знайдіть пряму і площину, які перпендикулярні одна до одної.

124. Які із зображених на мал.54 відрізків перпендикулярні до ребра AA_1 куба?



Мал.53

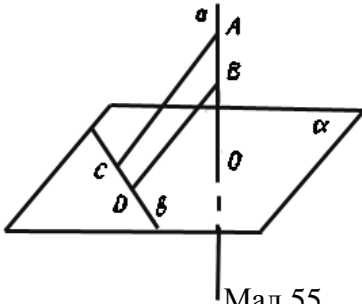


Мал.54

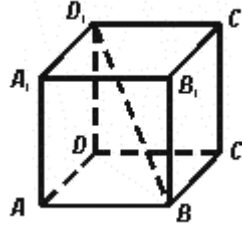
125. Знайдіть ортогональні проекції відрізка D_1B на грані куба

(мал.55).

126. Три точки A, B, C знаходяться на однаковій відстані від площини α . Чи можна стверджувати, що ці точки лежать на площині, паралельній α ?



Мал.55



Мал.56

127. На мал.56 зображено площину α і дві прямі: a – перпендикулярна до площини α і b , яка лежить на площині α . На прямій a взято дві точки A та B і з них опущено перпендикуляри AC і BD на пряму b . Чи правильно виконано малюнок?

128. Як на практиці встановити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?

129. Чи правильні твердження?

1) Через точку, взятую поза площиною, можна провести площину, перпендикулярну до даної площини, і причому тільки одну.

2) Якщо площина перпендикулярна до даної площини, то вона перпендикулярна і до довільної прямої, паралельної цій площині.

3) Якщо площина і пряма перпендикулярні до однієї й тієї самої площини, то вони паралельні між собою.

130. До твердження «Якщо дві площини перпендикулярні до третьої площини, то пряма їх перетину також перпендикулярна до цієї самої площини» сформулюйте обернене. Чи правильне воно?

131. На двох перпендикулярних площинах вибрали по прямій. Чи може статися, що ці прямі мимобіжні? Відповідь проілюструйте прикладом з оточення.

Декартові координати і вектори у просторі

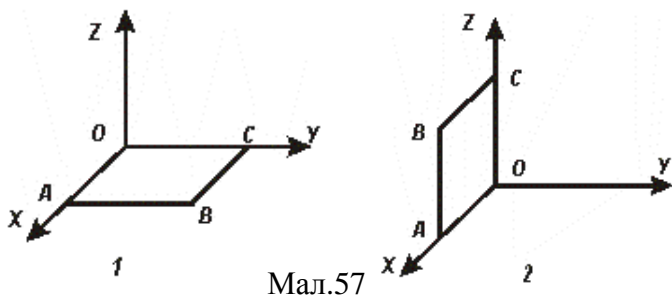
Задачі на обчислення

132. Точка A розміщена на від'ємній півосі y на відстані 6 від початку координат. Які координати точки A ?

133. На якій відстані від площини yz розміщена точка $A(-2;-3;-4)$?

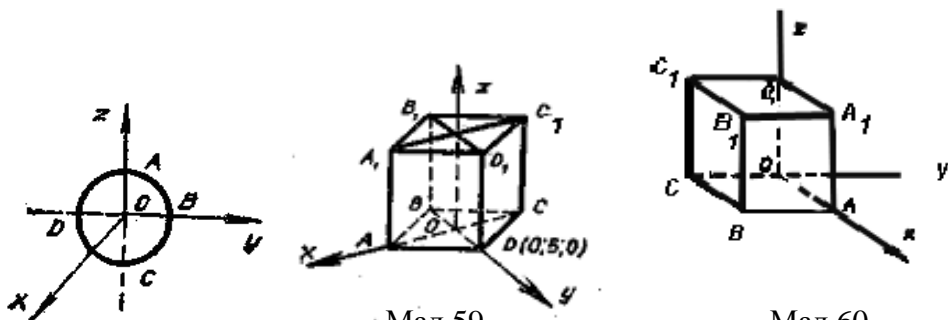
134. У точок $A(2;3;5)$ і $B(2;3;8)$ дві перші координати однакові, а треті – різні. Яка особливість розміщення цих точок у просторі? Яка відстань між цими точками?

135. Сторона квадрата $OABC$ (мал.57) дорівнює 3 см. Які координати вершин квадрата?



Мал.57

136. Коло з центром O і радіусом 2 розміщено у площині yz (мал.58). Які координати точок A, B, C, D ?



Мал.59

Мал.60

137. Точка M знаходиться на колі з центром O і радіусом 4. Коло розміщене у площині xz . Що можна сказати про координати $(x; y; z)$ точки M ?

138. Які координати вершин куба (мал.59)?

139. Ребро куба дорівнює 10 (мал.60). Які координати його вершин?

140. На якій відстані від початку координат розміщені точки $A(-5;0;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(0;0;-7)$?

141. Яка відстань між точками $A(0;-2;0)$ і $B(0;7;0)$?

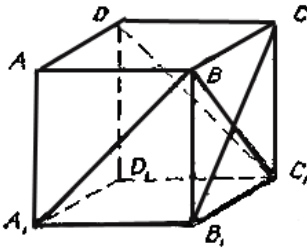
142. Які координати середини відрізка AB , якщо $A(0;2;11)$, $B(2;0;-1)$?

143. Для точки $A(2;1;3)$ знайти симетричні точки відносно координатних площин.

144. Для точки $M(1;2;2)$ побудували точку M' , симетричну відносно початку координат. Яка довжина відрізка MM' ?

145. Використовуючи зображення куба на мал.61, знайдіть кути між прямими і заповніть таблицю.

Прямі	BC	BC_1	DC_1
AA_1			
CB_1			
A_1B_1			



Мал.61

146. Заповніть порожні місця в таблиці.

Площа многокутника у просторі	Кут між площинами многокутника і його проєкції	Площа проєкції
100	60^0	
64		32
	45^0	10

147. Ребро куба дорівнює 1. Як обчислити площу перерізу на мал.51?

148. Які координати вектора \vec{AO} , якщо $A(5;-1;3)$ (точка O – початок координат)?

149. Дано точки $B(2;3;4)$, $C(0;0;6)$. Які координати вектора \vec{CB} ?

150. Дано: $\vec{a}(2;0;3)$, $\vec{b}(0;4;-1)$. Знайдіть координати $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$.

151. Коли вектор $\vec{a}(-1;2;3)$ відклали від початку координат, то дістали вектор \vec{OA} . Які координати точки A ?

152. Вектори $\vec{a}(2; y; z)$ і $\vec{b}(1;3;-2)$ колінеарні. Чому дорівнюють y і z ?

153. Знайдіть такі числа m і n , щоб вектори $\vec{a}(4;3;m)$ і $\vec{b}(2;n;-1)$ були колінеарні.

154. Чи колінеарні вектори $\vec{a}\left(-1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ і $\vec{b}(2; -3; -1)$?

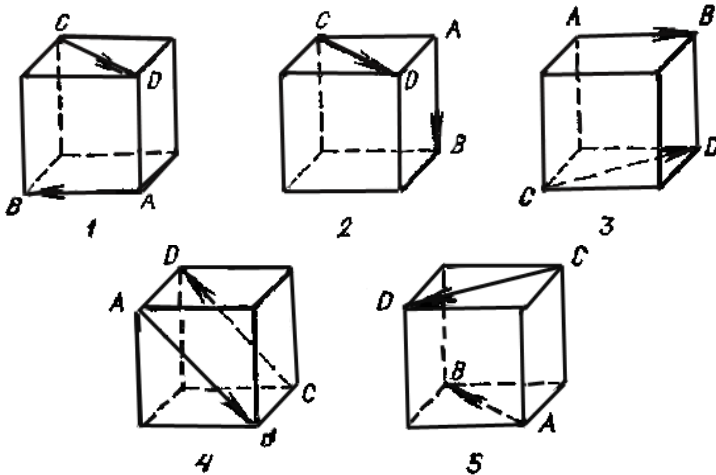
155. Дано $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(4; 2; -1)$. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

156. Чи є серед векторів $\vec{a}(2; 3; 1)$, $\vec{b}(5; 9; 2)$, $\vec{c}(-3; 1; 3)$ перпендикулярні?

157. У якого з векторів $\vec{a}(0; 1; 3)$, $\vec{b}(2; 0; 2)$ абсолютна величина більша?

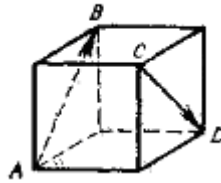
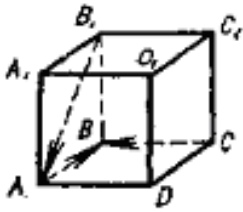
158. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 120^\circ$; $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$. Чому дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

159. Який кут утворюють вектори $\vec{a}(-5; 0; 0)$ і $\vec{b}(0; 3; 0)$; $\vec{m}(a; b; 0)$ і $\vec{n}(0; -c; b)$?



160. Обчисліть кут між векторами \vec{AB} і \vec{CD} (мал.62).

161. Довжина ребра куба дорівнює 7 (мал.63). Обчисліть: AB^2 ; $\vec{AB} \cdot \vec{CB}$; $\vec{AB} \cdot \vec{B_1A}$.



Мал.63

Мал.64

162. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 40° . Знайдіть: 1) кут між векторами $-2\vec{a}$ і \vec{b} ; 2) кут між векторами $-3\vec{a}$ і $-2\vec{b}$.

163. Ребро куба дорівнює 8 (мал.64). Обчисліть скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

164. Чи лежить точка $A(1;2;3)$ на площині $5x+y-z-3=0$?

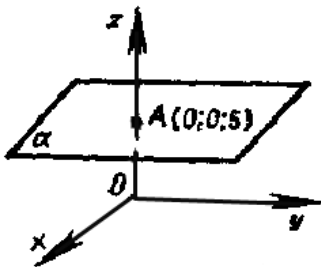
165. Чи проходить площина $x+y-3z=0$ через початок координат; через точку $M(2;1;1)$?

166. При якому значенні m площина $2x-3y+z+7-m=0$ проходить через початок координат?

167. Чи перпендикулярний вектор $\overrightarrow{(2;4;6)}$ до площини $x-2y+3z-1=0$?

168. Через початок координат перпендикулярно до вектора $n(1;1;1)$ провели площину. Складіть рівняння цієї площини.

169. Площина α паралельна площині xu і проходить через точку A (мал.65). Назвіть рівняння цієї площини.

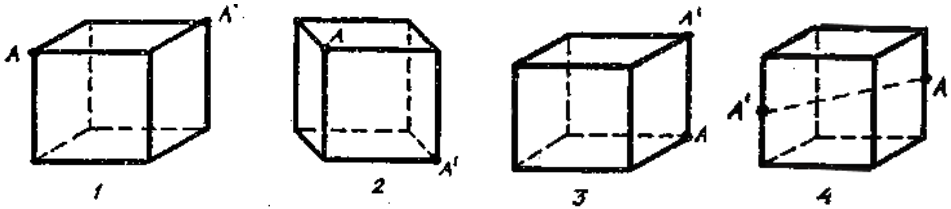


Мал.65

Задачі на побудову

170. Дано куб (мал.66). Побудуйте від руки фігуру, симетричну кубу відносно точки A .

171. Дано куб (мал.66). Виконайте від руки паралельне перенесення так, щоб точка A перейшла у точку A' .



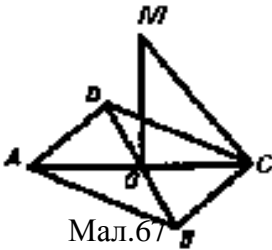
Мал.66

172. Дано куб (мал.66). Побудуйте від руки куб, який був би симетричний даному відносно прямої AA' .

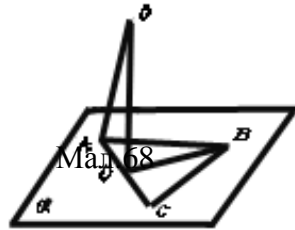
Задачі на доведення

173. На мал.67 $ABCD$ – ромб, пряма MO перпендикулярна до площини ABC . Доведіть, що $MC \perp BD$.

174. Точки A, B, C лежать на площині α (мал.68), $BD \perp AC$, OD перпендикулярна до площини α . Доведіть, що $BD \perp AO$.



Мал.67

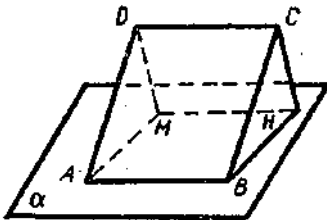


Мал.68

17

B, C, D – прямокутник (мал.69), AB лежить на площині α , DM і CH перпендикулярні до цієї площини. Доведіть, що $AMHB$ – прямокутник.

176.

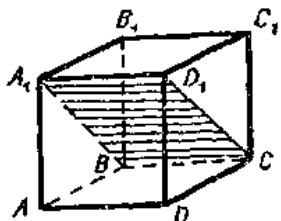


Мал.69

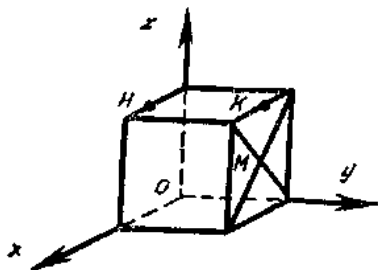
Задачі на дослідження

177. Як у кубі на мал.70 знайти кут між площинами $ABCD$ і

A_1D_1CB ?



Мал.70



Мал.71

178. Дві перші координати точки дорівнюють нулю, а третя – від'ємна. Як розміщена ця точка у просторі?

179. Точка M лежить на площині xz , але не на осях координат. Що можна сказати про координати цієї точки?

180. На мал.71 K і H – довільні точки ребер. Чи можна стверджувати, що у точок K і H одна з координат однакова; що у точок K і M також одна з координат однакова?

180. Скільки осей симетрії має у просторі відрізок? Чи є у відрізка площини симетрії?

181. Покажіть кілька площин симетрії кола, а також кілька осей симетрії.

182. Чи має площини симетрії рівнобедрений трикутник?

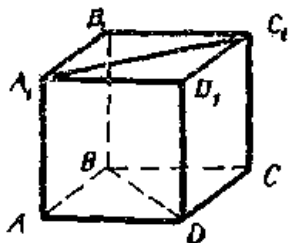
183. Дано у просторі довільну площину. Чи є у неї центри симетрії; осі симетрії; площини симетрії?

184. Покажіть в оточенні перпендикулярні мимобіжні прямі.

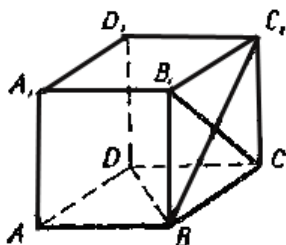
185. Чи можуть бути перпендикулярними дві прямі, які паралельні одній і тій самій площині?

186. Чи можна провести пряму так, щоб вона була перпендикулярна до всіх трьох сторін трикутника?

187. У кубі (мал.72) назвіть кути, які утворює пряма BD з прямими B_1C_1 і A_1C_1 .



Мал.72



Мал.73

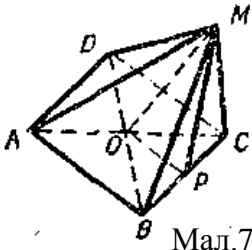
188. Чи може бути, що пряма a перпендикулярна до п'яти прямих площини α , але не перпендикулярна до площини α ?

189. У кубі на мал.73 назвіть кути між: 1) C_1B і площиною ABC ; 2) BD і площиною ABB_1A_1 ; 3) D_1B і площиною ADC ; 4) D_1B_1 і площиною BB_1C ; 5) B_1B і площиною D_1C_1B .

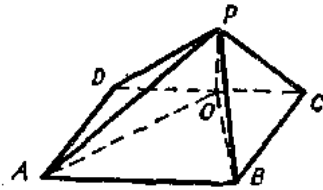
190. Чи правильно, що коли пряма перпендикулярна до двох сторін паралелограма, то вона перпендикулярна й до площини паралелограма?

191. На мал.74 $ABCD$ – квадрат, пряма MO перпендикулярна до площини ABC , $OP \perp BC$. Назвіть кути між: 1) MB і площиною ABD ; 2) MB і площиною MOP ; 3) MO і площиною MBC .

192. На мал.75 $ABCD$ – квадрат, пряма PO перпендикулярна до площини ABC . Назвіть кути між: 1) PB і площиною PCD ; 2) PB і площиною ABC ; 3) PO і площиною PBC ; 4) PD і площиною PBC ; 5) PC і площиною BCD ; 6) OB і площиною PCD .

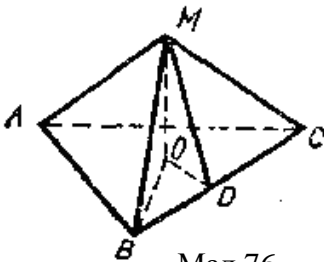


Мал.74

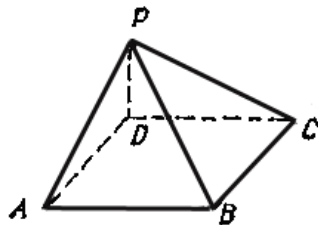


Мал.75

193. На мал.76 пряма $MO \perp$ до площини ABC , $CD \perp BC$. Назвіть на цьому малюнку кути між площинами: 1) MOB і MOD ; 2) MBC і ABC .



Мал.76

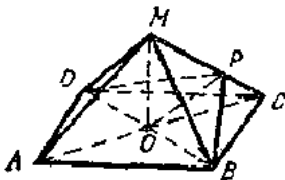


Мал.77

194. $ABCD$ – квадрат (мал.77), пряма PD перпендикулярна до площини ABC . Назвіть на цьому малюнку кути між площинами: 1) PBC і ABC ; 2) PCD і ABC ; 3) PAD і PCD ; 4) PAD і PBC .

195. На мал.78 $ABCD$ – квадрат, пряма MO перпендикулярна до

площини ABC , $BP \perp MC$. Назвіть на цьому малюнку кути між площинами: 1) PBD і BCD ; 2) MBC і MCD .



Мал.78

кут
протилежними?

196. Який
між суміжними гранями куба; між

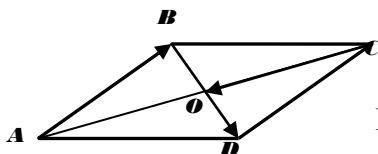
197. Чи може площа ортогональної проекції многокутника дорівнювати площі цього многокутника?

198. Як зрозуміти твердження «Якщо дві прямі, які перетинаються під кутом φ , паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні» у випадку, коли $\varphi = 90^\circ$?

199. Чи можлива рівність векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{BA} ?

200. $ABCD$ – паралелограм. Які векторні рівності можна записати?

201. $ABCD$ – паралелограм (мал.79). Спростіть: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CO}$.



Мал.79

202. Спростіть векторні суми без побудови малюнка:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{NM}$;

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$.

203. Дано вектори: $\vec{a}(2;-3;5)$; $\vec{b}(2;4;3)$, $\vec{c}(4;4;8)$. Чи правильно, що $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$?

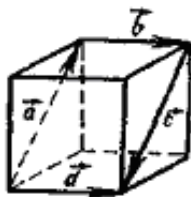
204. Чи колінеарні вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{BA} ?

205. Що можна сказати про вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$?

206. Чи правильне твердження: «Якщо скалярний добуток

векторів – число від'ємне, то це означає, що кут між векторами тупий»?

207. Напишіть векторну рівність, яка зв'яже вектори на мал.80.



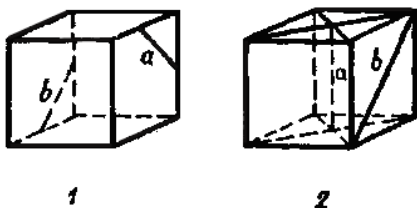
Мал.80

Закріплення матеріалу до Розділу 1

Задачі на обчислення

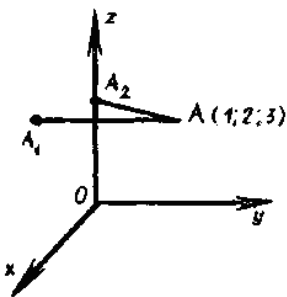
208. Точка $C(1;0;1)$ є серединою відрізка AB . Відомі координати точки $A(-1;0;-1)$. Які координати точки B ?

209. На мал.81 ребро куба дорівнює 6 см. Яка відстань між прямими a і b ?



Мал.81

210.3 точки A (мал.82) опущені перпендикуляри на площину xz і на вісь z . Які координати точок A_1 і A_2 ?

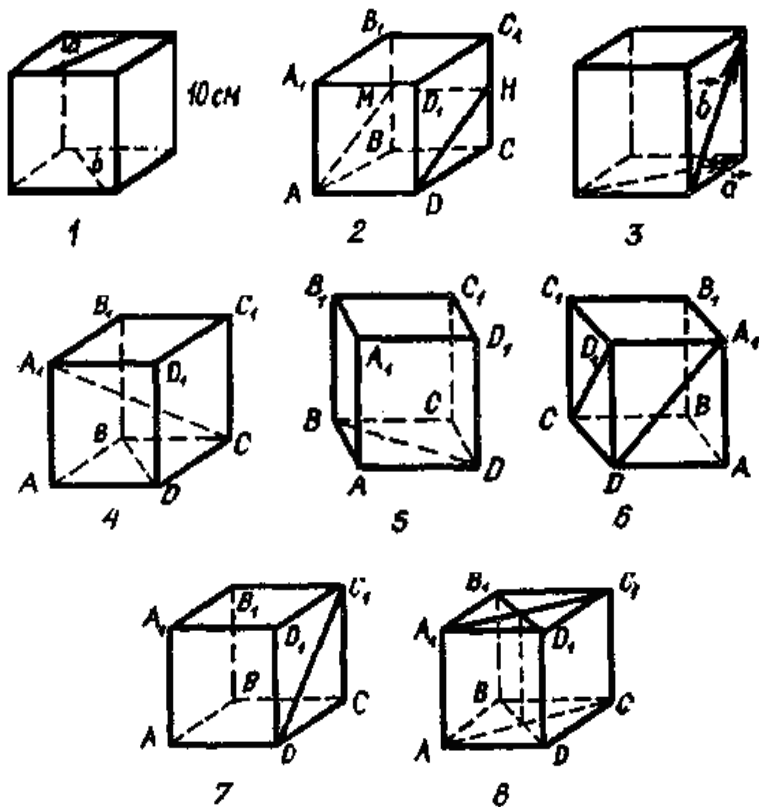


Мал.82

211. На мал.83 зображено куб.

- 1) Яка відстань між прямими a і b (мал.83(1))?
- 2) Чи є переріз $AMHD$ (мал.83(2)) прямокутником?

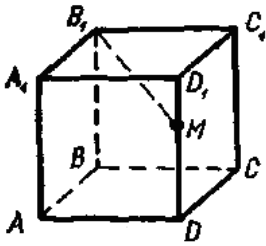
- 3) Який кут між векторами \vec{a} і \vec{b} (мал.83(3))?
- 4) Чи правильно, що $A_1C \perp BD$ (мал.83(4))?
- 5) Який кут між прямою BD і площиною AA_1D_1 (мал.83(5))?
- 6) Який кут між прямими A_1D і D_1C (мал.83(6))?
- 7) Який кут між прямими C_1D і AA_1 (мал.83(7))?
- 8) Чи можна стверджувати, що площини перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D взаємно перпендикулярні (мал.83(8))?



Мал.83

Задачі на побудову

212. Дано куб (мал.84). Як побудувати точку перетину прямої B_1M з площиною ABC ?



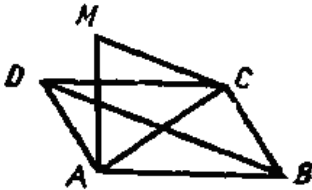
Мал.84

213. Дано рівнобедрений трикутник ABC , у якого $AB=BC$. Як зобразити перпендикуляр, проведений з точки M сторони AB до сторони AC трикутника?

Задачі на доведення

214. Доведіть від супротивного твердження: «Якщо пряма a не паралельна одній із паралельних прямих b і c , то вона не паралельна і другій».

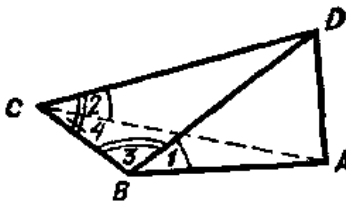
215. На мал.85 $ABCD$ – ромб, пряма MA перпендикулярна до площини ACD . Доведіть, що $MC \perp BD$.



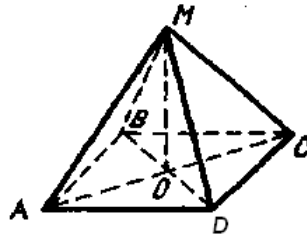
Мал.85

216. Доведіть способом від супротивного: «Якщо площина не перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона не перпендикулярна і до другої».

217. На мал.86 відрізок DA перпендикулярний до площини ABC . Доведіть, що коли $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$.



Мал.86



Мал.87

218. $ABCD$ – квадрат, відрізок MO перпендикулярний до

площини ABC (мал.87). Доведіть, що площини MAC і MBD взаємно перпендикулярні.

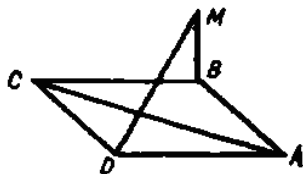
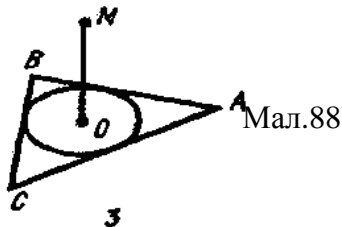
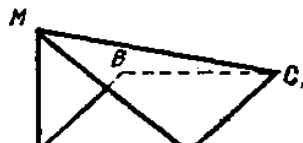
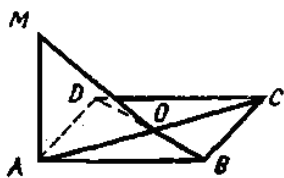
219. Теорема про три перпендикуляри (мал.88).

1) Дано: $ABCD$ – паралелограм, MA – перпендикуляр до площини ABD , $MO \perp BD$ (мал.88(1)). Довести: $ABCD$ – ромб.

2) Дано: $ABCD$ – прямокутник, MA – перпендикуляр до площини BCD (мал.88(2)). Довести: $\triangle MCD$ – прямокутний.

3) У трикутник ABC вписано коло, у центрі O якого проведено перпендикуляр MO до площини ABC (мал.88(3)). Як із точки M опустити перпендикуляр на сторони трикутника?

4) Дано: $ABCD$ – квадрат, MB – перпендикуляр до площини ACD (мал.88(4)). Довести: $MD \perp AC$.



Мал.88

Задачі на дослідження

220. Назвіть яку-небудь ознаку прямих, які перетинаються.

221. Знайдіть в своєму оточенні:

1) дві прямі перетинаються, а третя є мимобіжною до кожної з них;

2) дві прямі мимобіжні, а третя перетинає кожну з них;

3) дві прямі паралельні, а третя є мимобіжною до кожної з них.

222. Одна із паралельних прямих паралельна площині α . Чи можна стверджувати, що друга пряма також паралельна цій площині?

223. Чи правильне твердження: «Якщо кожна із двох прямих мимобіжна з третьою прямою, то вони теж мимобіжні»?

224. Що спільне і що відмінне мають паралельні і мимобіжні прямі?

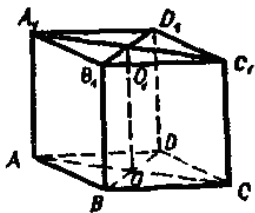
225. Одна з двох прямих, що перетинаються, паралельна

площині. Чи можна стверджувати, що друга пряма перетинає цю площину?

226. Пряма одночасно паралельна двом площинам, які перетинаються. Чи можна стверджувати, що вона паралельна прямій їх перетину? Чому?

227. Який найбільший можливий кут між двома прямими у просторі?

228. Чи перпендикулярні площини діагональних перерізів куба (мал.89)?



Мал.89

229. Чи може площа ортогональної проекції многокутника на площину бути в n разів менша за площу самого многокутника? Відповідь поясніть.

230. Що являє собою геометричне місце точок, віддалених від даної площини на відстань 5 см?

231. Дві прямі у просторі утворюють кут 60° . На кожній з прямих взято по вектору. Що можна сказати про величину кута між векторами?

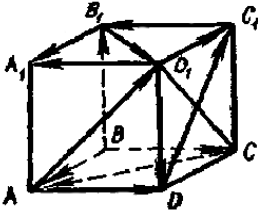
232. Чому штативи фотоапаратів, геодезичних приладів мають три опорних ніжки?

233. Спростіть без малюнка: 1) $\vec{AB} + \vec{MP} + \vec{PD} + \vec{KM} + \vec{DA}$; 2) $\vec{OA} - \vec{OB}$.

234. Дано рівняння площини $3x - 2y + z - 6 = 0$. Назвіть точку, яка лежить на цій площині, і точку, що не лежить на ній.

235. Чи правильне твердження: «Якщо проекції двох прямих на площину паралельні між собою, то і самі прямі у просторі паралельні»?

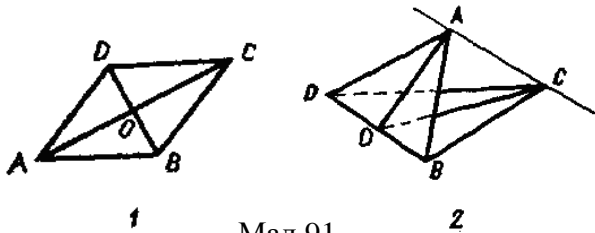
236. За мал.90 спростіть вирази: 1) $\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{D_1A_1}$; 2) $\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{D_1C_1}$; 3) $\vec{CC_1} + \vec{CA} + \vec{AD}$; 4) $\vec{AD} + \vec{C_1B_1} + \vec{DC_1}$; 5) $\vec{B_1A_1} + \vec{AD} + \vec{A_1A}$; 6) $\vec{BB_1} + \vec{D_1D} + \vec{B_1D_1}$.



Мал.90

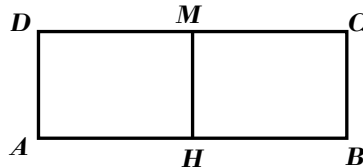
237. Що являє собою у просторі геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок; від трьох даних точок? Як розв'язуються аналогічні задачі у планіметрії?

238. Ромб $ABCD$ (мал.91) перегнули по діагоналі BD і отримали нову фігуру. Який у цій фігурі кут між прямими AC і BD ?



Мал.91

239. Прямокутний листок паперу перегнули по лінії MH (мал.92). Утворену фігуру «поставили» на стіл так, щоб точки A, B, C і D лежали в його площині. Чи паралельна пряма MH площині стола?



Мал.92

240. Скільки площин симетрії має куб?

241. Дві вершини і точка перетину діагоналей паралелограма лежать у площині α . Чи можна стверджувати, що і дві інші вершини паралелограма лежать в цій площині? Чому?

242. Про вектори \vec{a} і \vec{b} відомо, що їх скалярний добуток тільки знаком відрізняється від добутку їх абсолютних величин. Який можна зробити звідси висновок?

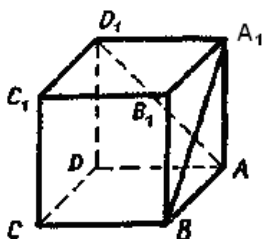
243. Чи можна ознаку паралельності прямої і площини сформулювати так: «Якщо пряма, яка не належить площині, утворює з

якою-небудь прямою цієї площини кут 0° , то вона утворює кут 0° і з самою площиною»? Сформулюйте аналогічно ознаку паралельності двох площин.

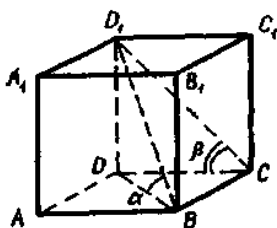
244. Як геометрично пояснити рівність $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+3)^2 = 1$?

245. Як на практиці перевірити перпендикулярність осі свердла до площини стола, на якому кріпиться деталь?

246. Який кут утворює пряма A_1B з площиною кожної грані куба (мал.93)?



Мал.93



Мал.94

247. Чи правильно, що з теореми «Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні» дістанемо такий наслідок «Якщо прямі не перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони не паралельні»?

248. Чи можна розмістити у просторі кут так, щоб його проекцією на площину була півпряма; точка?

249. Дано куб (мал.94). Який із кутів більший α чи β ? Відповідь поясніть.

250. Наведіть приклади геометричних тверджень, що мають таку будову: 1) Якщо A і B , то C ; 2) Якщо A або B , то C ; 3) Якщо A , то B і C ; 4) Якщо A , то B або C .

251. Чи можна обійтися без теорем, щоб усі твердження були аксіомами? Чи можна обійтися без аксіом, щоб усі твердження були теоремами?

252. Наведіть приклад. 1) Коли теорема правильна, а обернена до неї – ні; 2) коли твердження неправильне, а обернене до нього твердження – правильне.

253. З яких етапів складається доведення теорем способом від супротивного? Доведіть цим способом: «Якщо чотири точки не

належать одній площині, то ніякі три з них не лежать на одній прямій».

254. Чи потрібно довести, що через дві паралельні прямі можна провести площину?

255. Чи правильно, що геометричним місцем точок, спільним двом площинам, які перетинаються, є пряма перетину цих площин?

256. Чи можна стверджувати, що дві прямі мимобіжні, якщо:

1) обидві вони не лежать в площині α ;

2) одна з них лежить в площині α , а друга лежить в площині β ;

3) одна з них лежить в площині α , а друга перетинає площину α ;

4) площина α проходить через дві точки однієї прямої і дві точки другої прямої?

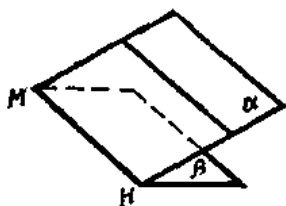
257. На одній з паралельних площин проведена пряма. Чи можна стверджувати, що ця пряма паралельна другій площині?

258. Дві прямі паралельні площині. Чи завжди на площині знайдеться пряма, яка одночасно паралельна даним прямим?

259. Чи правильне твердження: «Якщо пряма не паралельна площині, то на цій площині немає жодної прямої, паралельної даній»?

260. Чи правильне таке означення: «Пряма називається мимобіжною з площиною, якщо вона мимобіжна з кожною прямою цієї площини»?

261. Дві площини α і β перетинаються (мал.95). Чи можна стверджувати, що пряма, яка проведена на площині α паралельно β обов'язково буде паралельна прямій MN ? Відповідь поясніть.



Мал.95

треба

перетинає

перпендикулярна до двох радіусів, тому вона перпендикулярна до площини круга»?

263. Чи завжди на площинах, які перетинаються, можна взяти прямі так, щоб вони були перпендикулярними між собою?

262. Яке доповнення внести, щоб було правильним твердження: «Пряма a круг u центрі і

264. Чи можна провести пряму так, щоб вона була перпендикулярна до трьох сторін трикутника?

265. Чи можна провести площину, перпендикулярну одночасно до двох прямих, які перетинаються? Чому?

266. За допомогою прикладу з оточення доведіть, що не завжди дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої третьої площини, паралельні між собою.

267. Що являє собою геометричне місце точок простору, які знаходяться на однакових відстанях від вершин даного прямокутника?

268. Чи може площа ортогональної проекції многокутника на площину бути більшою від площі самого многокутника? Чому?

Розділ 2. Усні вправи із стереометрії для учнів 11 класу

Призма

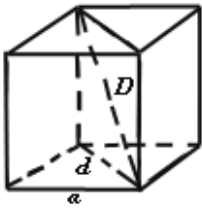
Задачі на обчислення

269. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть: діагональ грані; діагональ куба; периметр основи; площу грані; площу діагонального перерізу; площу поверхні куба; периметр і площу перерізу, який проходить через кінці трьох ребер, що виходять з однієї і тієї ж вершини.

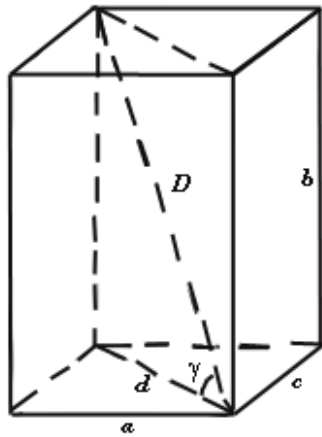
270. По мал.96 і по даним елементам в табл.1 знайдіть решту елементів куба.

Таблиця 1

a	d	D	S	Q
5				
	14			
		$11\sqrt{3}$		
			196	
				$36\sqrt{2}$



Мал.96



Мал.97

271. Використовуючи мал.97 та дані елементи в табл.2, знайдіть решту елементів прямокутного паралелепіпеда.

Таблиця 2

a	b	c	d	D	γ	S	Q
3	4	$5\sqrt{3}$					
5	12			$\frac{26}{\sqrt{3}}$			
7	24				45°		
8	6						
15		17	17				$100\sqrt{3}$

272. Перпендикулярним перерізом похилої 4-кутної призми, є ромб зі стороною 3 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми, якщо бічне ребро дорівнює 12 см.

273. Знайдіть бічну поверхню похилого паралелепіпеда з бічним ребром 32 см і суміжними сторонами перпендикулярного перерізу 10 см і 8 см.

274. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см. Висота призми – 5 см. Знайдіть: діагональ основи; діагональ бічної грані; діагональ призми; площу основи; площу діагонального перерізу; площу бічної поверхні; площу поверхні призми.

275. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 32 см^2 , а площа поверхні 40 см^2 . Знайдіть висоту призми.

276. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми рівні 2 см, 3 см і 4 см. Бічна поверхня призми – 45 см^2 . Обчисліть її бічне ребро.

277. Обчисліть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо відомо, що площа перерізу, який проходить через середні лінії основ, дорівнює 25 см^2 .

278. Кожне ребро правильної трикутної призми дорівнює 12 см. Обчисліть: площу основи; площу бічної поверхні; площу поверхні; площу перерізу, проведеного через медіану основи і бічне ребро, які проходять через одну вершину основи.

279. В прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа бічної поверхні 12 см^2 . Обчисліть висоту.

280. Обчисліть невідомі елементи правильної трикутної призми використовуючи елементи, які задані в табл.3.

Таблиця 3

a	H	P	S_b	S_n
6			90	
	$\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$		
	15		90	
		12	144	
			$108\sqrt{3}$	$126\sqrt{2}$

281. Обчисліть площу бічної поверхні правильної шестикутної призми, якщо дана площа Q більшого діагонального перерізу.

282. Через дві нерівні діагоналі основи правильної 6-кутної призми проведені діагональні перерізи. Обчисліть відношення їх площ.

283. Використовуючи елементи з табл.4, обчисліть невідомі елементи правильної шестикутної призми.

Таблиця 4

a	H	P	S_b	S_n
4	7			
6			720	
	5	18		
	20		240	
		12	144	

284. У правильній n -кутній призмі проведена площина під кутом 60° до основи так, що вона перерізає всі бічні грані призми. Площа основи дорівнює 50 см^2 . Обчисліть площу перерізу.

285. Дана n -кутна призма. Знайти суму величин її плоских кутів.

286. Із скількох кубиків з ребром 3 см можна скласти куб з ребром 15 см ?

287. Не використовуючи малюнок, розв'яжіть задачі.

а) Повна поверхня куба дорівнює 96 см^2 . Чому дорівнює об'єм куба?

б) Об'єм куба дорівнює 64 см^3 . Чому дорівнює площа бічної поверхні?

288. Чи може людина взяти і перенести куб із золота, якщо ребро куба дорівнює 20 см ? (1 м^3 золота важить приблизно 19 т).

289. Обчисліть об'єм куба, якщо:

а) площа його грані дорівнює Q ;

б) діагональ куба дорівнює d .

290. Сума всіх ребер куба дорівнює 24 . Чому дорівнює його об'єм?

291. Виміри прямокутного паралелепіпеда 15 м , 50 м , 36 м . Обчисліть ребро рівновеликого йому куба.

292. Обчисліть об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює h , а в основі лежить ромб з діагоналями d_1 і d_2 .

293. Виміри прямокутного паралелепіпеда утворюють геометричну прогресію, другий член якої дорівнює 4 см . Обчисліть його об'єм.

294. У правильній трикутній призмі всі ребра рівні. Обчисліть об'єм призми.

295. Об'єм прямої трикутної призми дорівнює 60 см^3 . Від неї відсікли чотирикутну призму площиною, яка проходить через середні лінії основ даної призми. Обчисліть об'єм чотирикутної призми.

296. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з

катетами 3 см і 4 см, найбільша її грань – квадрат. Обчисліть об'єм призми.

297. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної призми, площа основи якої дорівнює 49 см^2 , а площа бічної грані – 56 см^2 .

298. Дана правильна трикутна призма, у якої a – сторона основи, h – висота, S – площа основи, V – об'єм призми. Заповніть порожні комірки в табл.5.

Таблиця 5

№	a	h	S	V
1.	4	$2\sqrt{3}$		
2.	8			$80\sqrt{3}$
3.		$4\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	
4.		9		$324\sqrt{3}$
5.			$144\sqrt{3}$	$1440\sqrt{3}$

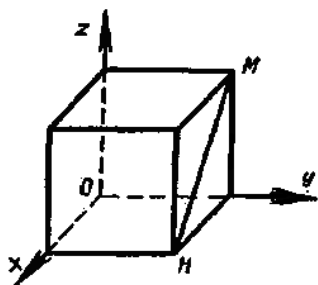
299. Дана правильна чотирикутна призма, у якої a – сторона основи, h – висота, S – площа основи, V – об'єм призми. Заповніть порожні комірки в табл.6.

Таблиця 6

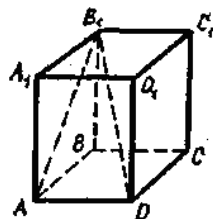
№	a	h	S	V
1.	5	4		
2.	8			448
3.		11	169	
4.		10		2250
5.			400	6000

300. Сторона основи правильної чотирикутної призми (мал.98) дорівнює 10, а висота 8. Які координати вектора \overrightarrow{MH} ?

301. У правильній чотирикутній призмі $B_1D=5$ см, $AB_1=4$ см (мал.99). Чому дорівнює сторона основи призми?



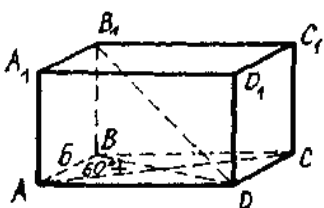
Мал.98



Мал.99

302. У прямокутному паралелепеді (Мал.100) Обчисліть BD , якщо $AA_1=6$.

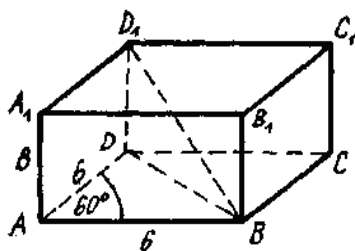
303. У прямому паралелепеді (Мал.101) Обчисліть довжину відрізка BD_1 .



304

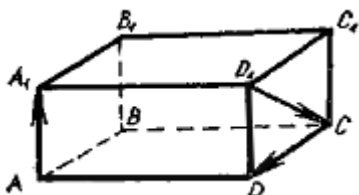
$$\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AA_1}$$

Мал.100



Мал.101

векторів



Мал.102

305. Ребро одного куба у 3 рази більше за ребро другого куба. У скільки разів повна поверхня першого куба більша за повну поверхню другого куба?

306. Розв'яжіть без побудови малюнка:

1) Діагональ куба дорівнює 9 см. Чому дорівнює ребро цього куба?

2) Ребро куба дорівнює 5 см. Чому дорівнює площа діагонального перерізу цього куба?

3) Діагональ грані куба 4 м. Чому дорівнює повна поверхня даного куба?

307. Як визначити повну поверхню куба, знаючи його діагональ?

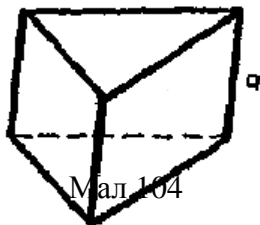
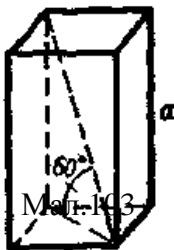
308. Розв'яжіть задачі без побудови малюнка.

1) Повна поверхня куба дорівнює 96 м^3 . Чому дорівнює об'єм куба?

2) Об'єм куба дорівнює 64 см^3 . Чому дорівнює площа бічної поверхні куба?

3) Ребро одного куба удвічі більше за ребро другого куба. У скільки разів об'єм першого куба більший за об'єм другого?

309. Чому дорівнює об'єм правильної призми на мал.103?



310. У правильній призмі (мал.104) всі ребра між собою рівні. Обчисліть об'єм призми.

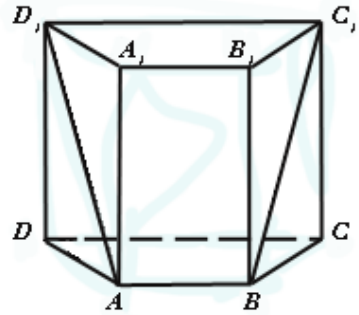
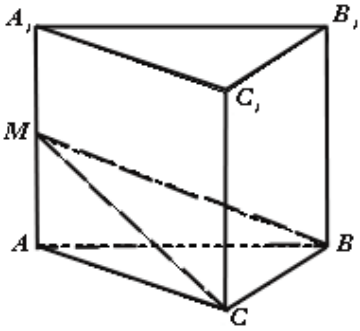
311. У призми 8 граней. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів многокутника основи?

Задачі на побудову

312. Побудуйте переріз куба у вигляді: а) трикутника, б) чотирикутника, в) п'ятикутника, г) шестикутника.

313. Побудуйте площину, яка проходить через сторону нижньої основи трикутної призми. Які багатокутники отримують в перерізі призми при обертанні цієї площини навколо сторони?

314. У правильній трикутній призмі площина перерізу BCM утворює з площиною основи двогранний кут α (мал.105). Побудуйте лінійний кут цього двогранного кута. Дайте пояснення.

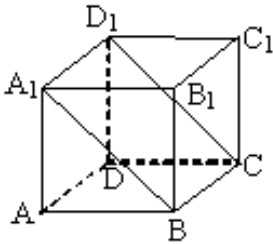


Мал.105

Мал.106

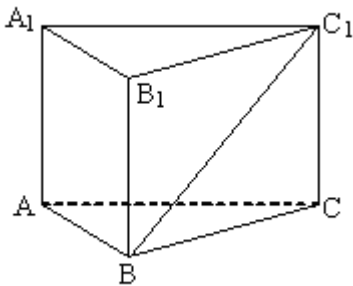
315. У основі прямої призми (мал.106) лежить рівнобедрена трапеція. Переріз ABC_1D_1 утворює з площиною основи двограний кут α . Побудуйте його лінійний кут.

316. Переріз BCD_1A_1 прямокутного паралелепіпеда (мал.107) утворює з площиною основи двограний кут β . Як побудувати його лінійний кут?

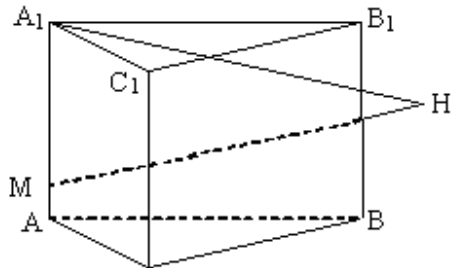


Мал.107

317. В правильній трикутній призмі (мал.108) відрізок BC_1 утворює з гранню AA_1B_1B кут α . Побудуйте цей кут.



Мал.108



Мал.109

318. Побудуйте точку, в якій відрізок MN перерізає поверхню призми (мал.109).

319. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см, 9 см і 7 см. Одиницею виміру є куб з ребром 3 см. За допомогою побудови доведіть, що об'єм паралелепіпеда виражається дробовим числом.

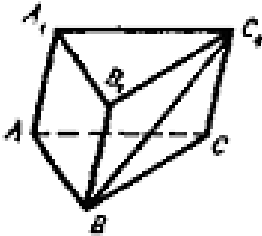
320. Побудуйте переріз правильної чотирикутної призми, що ділить її на дві рівновеликі призми.

321. Розділіть правильну трикутну призму на чотири рівновеликі трикутні призми.

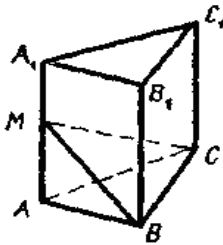
322. Через бічне ребро прямої трикутної призми проведіть дві площини, перпендикулярні основі, які розділять призму на три рівновеликі призми.

323. У правильній трикутній призмі на мал.110 відрізок BC_1 утворює з гранню AA_1B_1B кут α . Побудуйте кут α .

324. У правильній трикутній призмі на мал.111 площина перерізу BCM утворює з площиною основи кут α . Побудуйте цей кут на малюнку. Дайте пояснення.



Мал.110



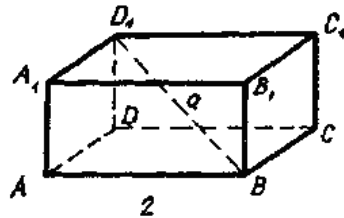
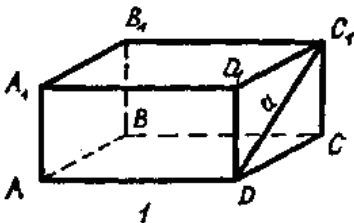
Мал.111



Мал.112

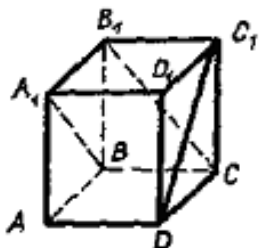
325. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція (мал.112). Переріз утворює з площиною основи кут α . Покажіть цей кут на малюнку.

326. У прямокутних паралелепіпедах (мал.113) відрізок a утворює з бічною гранню AA_1D_1D кут α , а з площиною основи – кут β . Покажіть ці кути на малюнку.

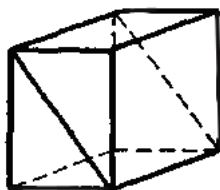


Мал.113

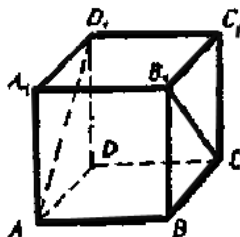
327. У правильній призмі (мал.114) кут між прямими A_1B і C_1D дорівнює α , а кут між прямими B_1C і C_1D дорівнює β . Позначте ці кути на малюнку?



Мал.114



Мал.115



Мал.116

328. Діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β (мал.115). Зобразіть кут β .

329. Чи має пара відрізків AD_1 і B_1C на мал.116 вісь симетрії? Якщо так, то як її побудувати?

Задачі на доведення

330. У паралелепіпеді діагоналі основи рівні, а бічне ребро перпендикулярне двом суміжним сторонам основи. Доведіть, що паралелепіпед прямокутний.

331. Доведіть, що число ребер призми кратне 3.

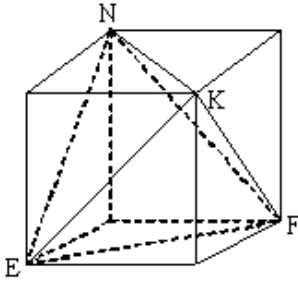
332. Доведіть, що сума двограних кутів при всіх бічних ребрах чотирикутної призми дорівнює 360° .

333. Якщо призма має 18 граней, то в її основі лежить 16-кутник. Доведіть.

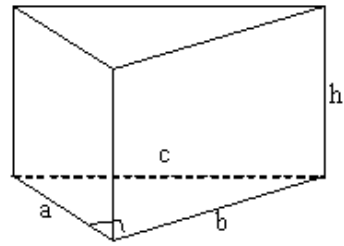
334. У кубі з вершини N проведені діагоналі граней NE , NF , NK . Кінці їх сполучені відрізками (мал.117). Доведіть, що многогранник $NEFK$ – правильний тетраедр.

335. Якщо дві бічні грані трикутної призми взаємно перпендикулярні, то сума квадратів їх площ дорівнює квадрату площі третьої бічної грані (мал.118). Доведіть.

336. Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником.



Мал.117



Мал.118

337. Від куба з ребром a відсічені чотири трикутні призми площинами, що проходять через середини суміжних сторін основ паралельно бічним ребрам. Доведіть, що об'єм частини куба, яка залишилася, дорівнює $\frac{1}{2}a^3$.

338. Доведіть, що об'єм прямого паралелепіпеда дорівнює добутку площі бічної грані на відстань від цієї грані до паралельної їй грані.

339. Площі попарно перпендикулярних граней прямокутного паралелепіпеда рівні S_1, S_2 і S_3 . Доведіть, що його об'єм $V = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

340. Доведіть, що площина, яка проходить через паралельні середні лінії основ трикутної призми, ділить її об'єм відносно 1:3.

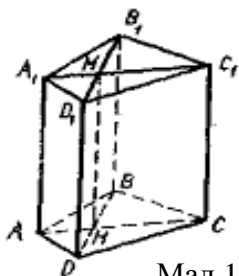
341. Доведіть, що об'єм правильної призми дорівнює половині добутку площі її бічної поверхні $S_{бч}$ на радіус r вписаного в основу кола.

342. Доведіть, що площина, яка проходить через бічне ребро трикутної призми і медіану основи, ділить цю призму на дві рівновеликі частини.

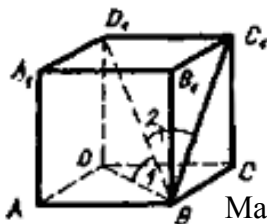
343. Доведіть, що площина, яка проходить через бічне ребро трикутної призми і бісектрису основи, ділить призму на частини, відношення об'ємів яких дорівнює відношенню сторін, між якими розташована бісектриса.

344. Доведіть, що можна заповнити простір без просвітів рівними прямими призмами, в основах яких лежать ромби з кутом 120° .

345. Доведіть, що проведені у призмі діагоналі перетинаються по прямій MN , яка паралельна бічним ребрам призми (мал.119).



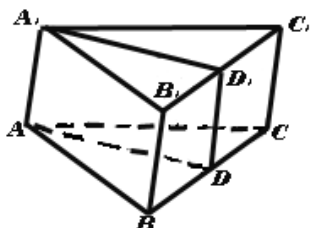
Мал.119



Мал.120

346. Чи правильно, що у кубі $\angle 1 = \angle 2$ (мал.120)?

347. На мал.121 AD – медіана трикутника ABC . Доведіть, що об'єми частин призми $ABCDA_1C_1D_1$ і $ACDDA_1C_1D_1$ однакові.



Мал.121

Задачі на дослідження

348. Поставте куб так, щоб жодна грань не була вертикальною. Чи будуть тоді у нього горизонтальні грані?

349. Чи можна куб з ребром в 7 см обклеїти листом паперу у вигляді прямокутника шириною 14 см і довжиною в 21 см?

350. Скільки потрібно взяти прямокутників і якою властивістю вони повинні володіти, щоб з них можна було скласти прямокутний паралелепіпед?

351. Встановіть: прямою чи похилою є призма, у якої дві суміжні бічні грані перпендикулярні основі.

352. Дослідіть, чи існує призма, що має 50 ребер? 54 ребра?

353. Який багатокутник лежить в основі призми, якщо вона має n граней?

354. Довжини ребер двох кубів відносяться як 1:3. Проілюструйте за допомогою малюнка, як відносяться їх об'єми.

355. Дані три металеві куби з ребрами відповідно 3см, 4см і

5см. Чи можна з цих трьох кубів відлити куб з ребром 6см?

356. Чи будуть рівновеликі два прямих паралелепіпеда з рівними висотами, якщо рівні їх бічні поверхні?

357. Два прямих паралелепіпеда з рівними висотами рівновеликі, їх бічні поверхні рівні. Чи рівні самі паралелепіпеди?

358. Розгортка бічної поверхні паралелепіпеда є прямокутником, основа якого дорівнює 40 см, а висота – 20 см. Який найбільший об'єм може мати паралелепіпед, обмежений даною бічною поверхнею?

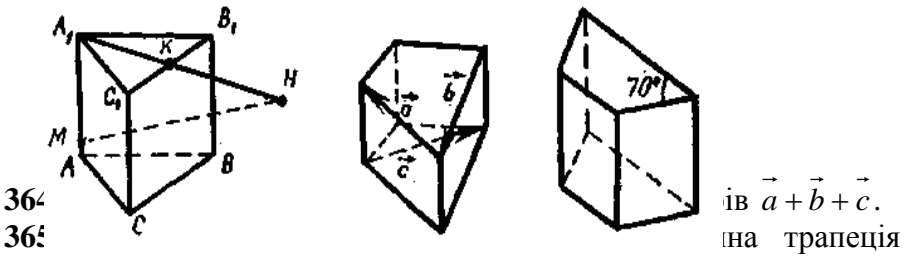
359. Як відносяться об'єми правильних призм однієї і тієї ж висоти, якщо їх основами є однойменні правильні багатокутники?

360. Обчисліть помилку в умові задачі: «Сторона основи правильної п'ятикутної призми $a=10$ см, а радіус кола, вписаного в основу, $r=5$ см. Визначить об'єм призми, якщо її висота $h=20$ см».

361. Дана правильна чотирикутна призма. На скільки відсотків збільшиться її об'єм, якщо: а) всі ребра збільшити на 10%; б) сторони основ збільшити на 10%, а висоту зменшити на 10%?

362. Потрібно визначити об'єм тіла, форма якого не нагадує жодне з відомих геометричних тіл. Як це можна зробити?

363. Обчисліть точку, в якій відрізок MN перетинає поверхню призми (мал.122).



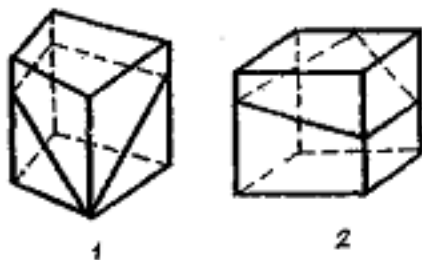
364. Знайдіть величину двох відомих кутів між бічними ребрами цієї призми?

366. Чи правильне твердження: «У кожній призмі число ребер завжди кратне трьом?»

367. Призма має 18 граней. Який багатокутник лежить в її основі?

368. Чи можна стверджувати, що у прямій призмі бічне ребро перпендикулярне до кожної діагоналі основи?

369. Як перевірити, чи правильно побудований переріз на



Мал.125

370. Скільки у правильній трикутній призмі площин симетрії?
Відповідь проілюструйте на моделі.

371. Чи існує призма, у якої точно три площини симетрії?

372. Які треба мати відомості про призму, щоб стверджувати, що вона не є правильною?

373. Чи може пряма призма не мати жодної площини симетрії?

374. Чи можна, розглядаючи одну й ту саму модель паралелепіпеда, стверджувати, що він прямий і що він похилий?
Відповідь проілюструйте на моделі.

375. Назвіть які-небудь предмети побуту, що мають форму похилого паралелепіпеда. Чому такі предмети зустрічаються дуже рідко?

376. Учень вважає, що терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» означають одне й те саме. Чи правий учень?

377. Чи можна вважати правильним означення: «Кубом називається правильна чотирикутна призма, у якої висота дорівнює стороні основи»?

378. Чи існує призма, яка має 16 ребер? Чому?

379. Щоб довести, що призма правильна, треба розглянути два пункти, а що вона неправильна – один. Про які пункти йдеться?

380. Чи правильне міркування: «Оскільки всі бічні грані даної призми – квадрати, то ця призма – правильна»?

381. Обчисліть залежність, за якою, знаючи, скільки у призми або піраміди вершин і граней, можна визначити, скільки у них ребер.

Піраміда

Задачі на обчислення

382. У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут, рівний 37° . Найдіть кут між апофемами

протилежних бічних граней.

383. Бічне ребро правильної піраміди удвічі більше за її висоту. Визначіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

384. Периметр основи піраміди рівний 20 см, а площа її основи 16 см^2 . Обчисліть периметр і площу перерізу піраміди, проведеного паралельно основі через середину бічного ребра.

385. Бічні ребра піраміди рівні гіпотенузі прямокутного трикутника, який лежить в основі, і дорівнюють 12 см. Обчисліть висоту піраміди.

386. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 20 см, воно утворює з основою кут 45° . Обчисліть відстань від центру основи до бічного ребра.

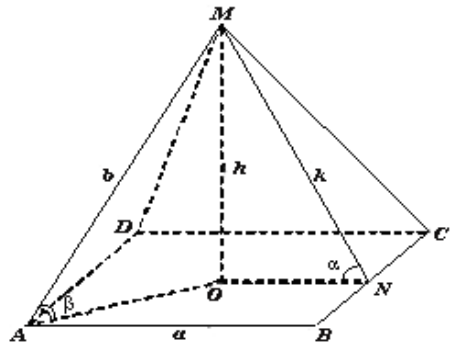
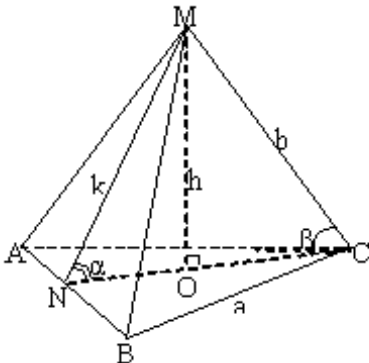
387. Використовуючи мал.126, на якому зображена правильна трикутна піраміда, заповніть порожні комірки в табл.7 і табл.8.

Таблиця 7

№ п/п	a	b	h	k	β
1	6	4			
2	12				
3		4			45°
4			4	$2\sqrt{7}$	60°

Таблиця 8

№ п/п	a	k	h	b	α
1	$2\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		
2			1		45°
3		4	2		
4	$4\sqrt{3}$				60°



388. Використовуючи мал.127, на якому зображена правильна чотирикутна піраміда, заповніть порожні комірки в табл.9 і табл.10.

Таблиця 9

№ п/п	a	k	h	b	α
1	2		$\sqrt{3}$		
2	$2\sqrt{2}$				45^0
3		6	3		
4		4			30^0

Таблиця 10

№ п/п	a	b	h	k	β
1		4			60^0
2			2		45^0
3		8	4		
4	$4\sqrt{2}$	8			

389. Площа бічної поверхні піраміди, в основі якої лежить трапеція, рівна $2Q$. Бічні грані піраміди утворюють з площиною основи рівні кути. Обчисліть суму площ бокових граней, що проходять через не паралельні сторони трапеції.

390. В основі піраміди лежить ромб. Бокові грані піраміди утворюють з основою рівні кути. Площа одній з бічних граней рівна Q . Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

391. Обчисліть площу бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди, якщо відомо, що її бічне ребро дорівнює a та із стороною основи утворює кут 60° .

392. Дано правильна трикутна піраміда, у якої a – сторона основи, k – апофема, P – периметр основи, S_1 , – площа бічної поверхні, S – площа поверхні піраміди. Заповніть табл. 11.

Таблиця 11

№ п/п	a	k	P	S_1	S
1	5			75	
2		24	24		
3		18		297	
4			45	315	

393. Дано правильна чотирикутна піраміда, у якої a – сторона основи, k – апофема, P – периметр основи, S_1 – площа бічної поверхні, S – площа поверхні піраміди (табл. 12).

Таблиця 12

№ п/п	a	k	P	S_1	S
1	6	12			
2	13				689
3		16		288	
4			44	396	
5				352	416

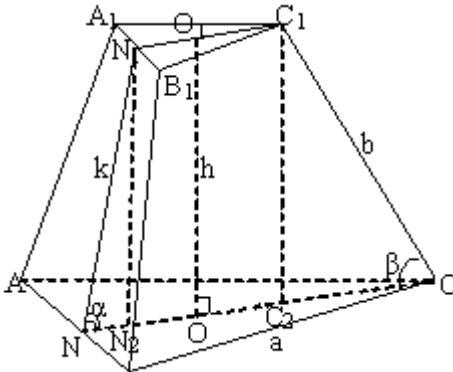
394. Два односторонні плоскі кути при ребрі бічної грані зрізаної піраміди рівні. Знайдіть ці кути.

395. Висота зрізаної піраміди рівна $2h$. Подібні сторони її основи відносяться як 1:3. Обчисліть висоту повної піраміди.

396. Основа зрізаної піраміди – прямокутник із сторонами 27 см і 15 см. Знайти сторони верхньої основи, якщо її периметр 56 см.

397. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди рівні 4 см і 2 см, висота піраміди – 3 см. Обчисліть площі діагональних перерізів даної зрізаної піраміди.

398. Дано правильна трикутна зрізана піраміда (мал.128), у якої a – сторона нижньої основи; a_1 – сторона верхньої основи, b – бокове ребро, h – висота, k – апофема, α – кут між бічною гранню і основою, β – кут між бічним ребром і основою. Заповнити табл. 13 і табл. 14.



Мал.128

Таблиця 13

№ п/п	a	a_1	b	h	k	α
1	$9\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$			
2	12	3				30°
3		3	8	4		
4		6	$2\sqrt{3}$			60°

Таблиця 14

№ п/п	a	a_1	b	h	k	α
1		6			$2\sqrt{3}$	60°
2	9	3			2	
3	12	6				45°
4		3		6		60°

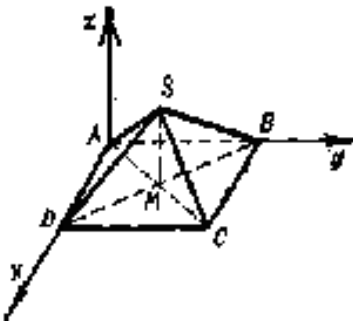
399. Заповнити табл. 15, якщо a і b – сторони основ піраміди, h – висота, k – апогема, S_1 – площа бічної поверхні, S – площа поверхні піраміди.

Таблиця 15

№	Вид зрізаної правильної піраміди	a	b	h	k	S_1	S_2
1	3-кутна	12	6	1			
2	4-кутна	8	2	4			
3	6-кутна	4	2	1			

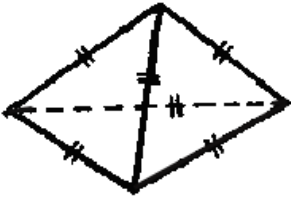
400. Чому дорівнює сума всіх плоских кутів трикутної піраміди?

401. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а висота дорівнює h (мал.129). Які координати вершин піраміди?

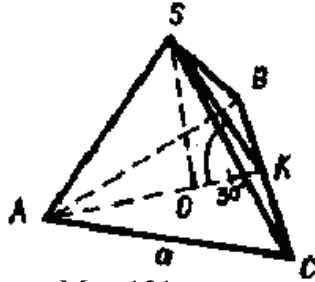


Мал.129

402. У піраміді на мал.130 кожне ребро дорівнює a см. Чому дорівнює повна поверхня піраміді?



Мал.130

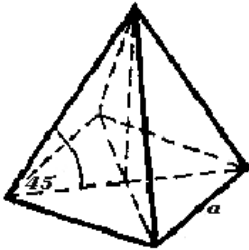


Мал.131

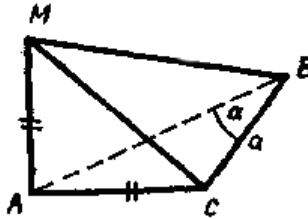
403. Обчисліть площу бічної поверхні правильної піраміді (мал.131).

404. Площа повної поверхні правильного додекаедра дорівнює 180 см^2 . Обчисліть площу однієї грані (без моделі та малюнка).

405. Обчисліть об'єм правильної піраміді на мал.132.



Мал.132



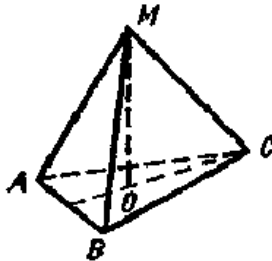
Мал.133

406. У піраміді (мал.133) $\angle ACB=90^\circ$, MA – висота, $MA=AC$. Чому дорівнює об'єм піраміді?

407. Від прямої призми (мал.134) переріз відтинає піраміді, об'єм якої дорівнює V . Обчисліть об'єм тієї частини, що залишилася.



Мал.134

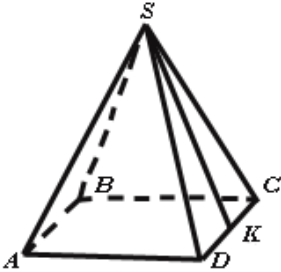


Мал.135

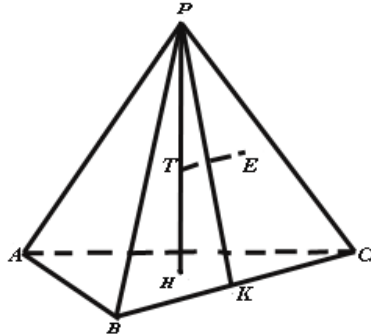
408. Який кут між ребрами AB і MC у правильній піраміді (мал.135)?

Задачі на побудову

409. Побудуйте два зображення однієї піраміди, одне – що має найбільше число видимих ребер, інше – що має найменше число видимих ребер.



Мал.136

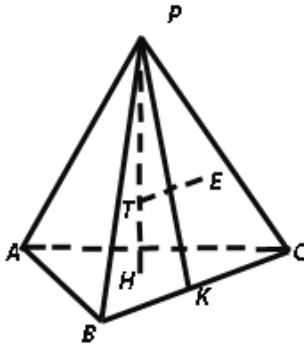


Мал.137

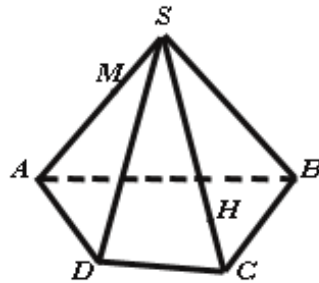
410. У правильній чотирикутній піраміді (мал.136) апофема утворює з площиною в основі кут β . Позначте цей кут на малюнку.

411. На мал.137 зображена піраміда $PABC$, у якої $PH \perp ABC$, $PK \perp BC$, $TF \perp PBC$, $F \in PBC$. Чи вірне креслення?

412. На мал.138 зображена піраміда $KABCD$. Через точку M , $M \in ABK$, провести пряму, паралельну BD .



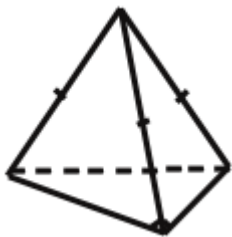
Мал.138



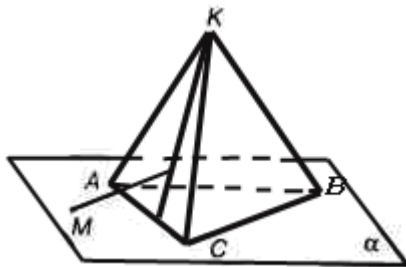
Мал.139

413. Побудуйте точку перетину прямої MH з площиною основи піраміди $SABCD$ (мал.139).

414. У основі трикутної піраміди, бічні ребра якої рівні, лежить прямокутний трикутник (мал.140). Побудуйте висоту піраміди.



Мал.140



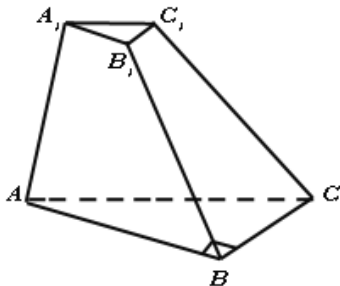
Мал.141

415. Через точку M на площині α (мал.141) проведена пряма, яка перетинає грань AKC піраміди $KABC$ в точці N . Яку ще грань перетне ця пряма?

416. Побудуйте многогранник, що має 11 ребер.

417. Побудуйте для правильної 3-кутної, 4-кутної, 6-кутної зрізаних пірамід кут α між бічним ребром і площиною основи, кут β між бічною гранню і площиною основи.

418. На мал.142 кут ABC рівний 90° , ребро AA_1 – висота зрізаної піраміди. Побудуйте кут між гранями AA_1B_1B і AA_1C_1C , кут між гранями CC_1B_1B і ABC .



Мал.142

419. Побудуйте переріз правильної трикутної зрізаної піраміди площиною, що проходить через: а) бічне ребро і апофему протилежної йому бічної грані; б) сторону нижньої основи і середину сторони верхньої основи, яка перетинається з нею.

420. Побудуйте переріз чотирикутної зрізаної піраміди площиною, яка проходить через середини двох суміжних сторін основи паралельно висоті піраміди.

421. Побудуйте піраміду, об'єм якої дорівнює $\frac{1}{8}$ об'єму даної піраміди.

422. Побудуйте геометричне місце вершин пірамід, що мають

загальну основу і рівні об'єми.

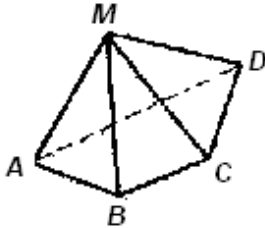
423. Побудуйте переріз трикутної піраміди, який ділить її на дві рівновеликі трикутні піраміди.

424. Побудуйте чотирикутну піраміду, одна грань якої є і гранню куба, а об'єм дорівнює $\frac{1}{3}$ об'єму куба.

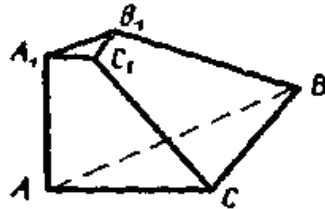
425. Побудуйте правильну трикутну піраміду, об'єм якої в 4 рази більше об'єму даної правильної трикутної піраміди.

426. Побудуйте переріз даної правильної чотирикутної зрізаної піраміди, який розділить її на дві рівновеликі частини.

427. Як на мал.143 побудувати пряму перетину площин AMB і CMD ?



Мал.143



Мал.144

428. Дано правильну зрізану трикутну піраміду. Побудуйте:

- 1) кут між бічним ребром і площиною основи;
- 2) кут між бічною гранню і площиною основи.

429. На мал.144 $\angle ABC=90^\circ$, ребро AA_1 висота піраміди. Побудуйте: 1) кут між гранями AA_1C_1C і AA_1B_1B ; 2) кут між гранями CC_1B_1B і ABC .

430. Дано піраміда (мал.145).

1) Піраміда $MABCD$ – правильна. Побудуйте кут між висотою MO і площиною MCD (мал.145(1)).

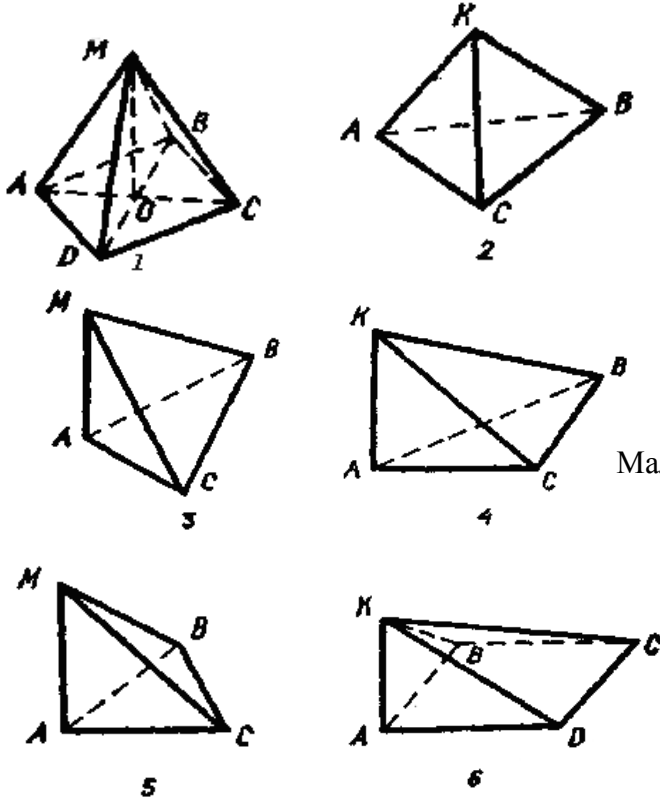
2) У піраміди всі ребра рівні. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при ребрі KB (мал.145(2)).

3) $\triangle ABC$ – правильний, AM – висота піраміди. Покажіть кути, які утворюють ребра MB і MC з площиною ABC (мал.145(3)).

4) $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle ACB=90^\circ$), AK – висота піраміди. Чи правильно, що $\triangle BKC$ – тупокутний (мал.145(4))?

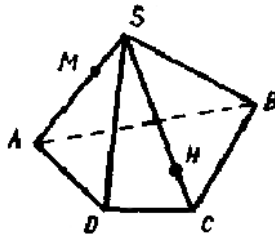
5) $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle ABC=90^\circ$), MA – висота піраміди. Покажіть на малюнку кут між гранями ABC і MBC (мал.145(5)).

6) $ABCO$ – прямокутник, AK – висота піраміди. Покажіть на малюнку кути між: 1) площинами AKB і BKC ; 2) площинами AKD і CKD (мал.145(6)).



Мал.145

431. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною основи піраміди (мал.146).



Мал.146

Задачі на доведення

432. Доведіть, що число плоских кутів в n -кутній піраміді ділиться на 4.

433. Якщо в правильній трикутній піраміді висота H рівна стороні основи a , то бічні ребра утворюють з площиною основи кути по 60° . Чи вірне це твердження?

434. Довести або спростувати твердження: «якщо в піраміді всі ребра рівні, то піраміда правильна».

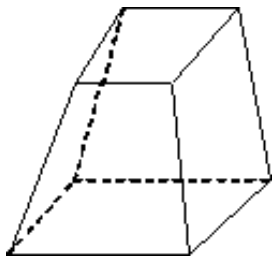
435. Довести, що сума площ проєкцій бічних граней пірамід на основу може бути більшою площі основи.

436. Сторона квадрата рівна 10 см. Довести, що не можна, використовуючи його як основу, побудувати правильну чотирикутну піраміду з бічним ребром 7 см.

437. Довести, що в правильній піраміді кут нахилу бічного ребра до площини основи α менший кута нахилу бічної грані до площини основи β .

438. Довести, що зрізана піраміда не може мати в основах прямокутники, сторони яких рівні: 10 см і 8 см, 5 см і 3 см.

439. Довести, що креслення зрізаної пірамід на мал.147 невірне.



Мал.147

440. Довести, що не існує зрізана піраміда, у якої всі ребра рівні.

441. Довести, що в умові задачі є помилка: «Плоский кут грані правильної п'ятикутної зрізаної пірамід дорівнює 50° . Знайти суму всіх плоских кутів пірамід».

442. Доведіть, що площі основ двох рівносторонніх пірамід обернено пропорційні їх висотам.

443. На відстані h_1 від вершини пірамід об'єму V з висотою h проведено переріз паралельно основі ($h_1 < h$). Об'єм зрізаної пірамід дорівнює V_1 . Доведіть, що $\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{h_1^3}$.

444. Дві грані тетраедра рівні трикутники. Доведіть, що висоти тетраедра, опущені на ці грані, рівні.

445. Будь-які два мимобіжних ребра правильного тетраедра

рівні. Доведіть, що рівні чотири його висоти.

446. У правильну трикутну піраміду вписана правильна трикутна піраміда так, що її вершина співпадає з центром основи даної піраміди, а вершинами основи служать середини бічних ребер.

Доведіть, що об'єм вписаної піраміди дорівнює $\frac{1}{8}$ об'єму даної піраміди.

447. Правильна трикутна піраміда, всі ребра якої рівні, перетинається площиною, що проходить через середини трьох її ребер, які виходять з однієї вершини. Доведіть, що ця площина ділить об'єм піраміди у відношенні 1:7.

448. У основі піраміди лежить прямокутник. Доведіть, що чотири площини, що проходять через вершину піраміди і середини суміжних сторін основи, відтинають від даної піраміди $\frac{1}{2}$ частини її об'єму.

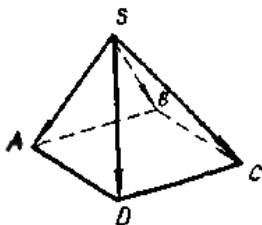
449. Доведіть, що формулу об'єму зрізаної піраміди можна використовувати для обчислення об'єму і піраміди, і призми.

450. Дано піраміда з висотою h і площею основи S . На відстані h_1 від її вершини паралельно основі проведено переріз площиною S_1

Доведіть, якщо $\frac{h_1}{h} = k$, то об'єм одержаної зрізаної піраміди дорівнює

$V = \frac{SH}{3}(1 + k + k^2)$, де $H = h - h_1$ – висота зрізаної піраміди.

451. Доведіть, що у правильній піраміді (мал.148) справедлива рівність $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}$.



Мал.148

452. Дана піраміда (мал.149).

1) Всі бічні ребра піраміди рівні між собою, KO – висота піраміди (мал.149(1)). Що можна сказати про кути трикутника ABC ?

2) Дано: $ABCD$ – паралелограм; $MA = MC$, $MB = MD$ (мал.149(2)).

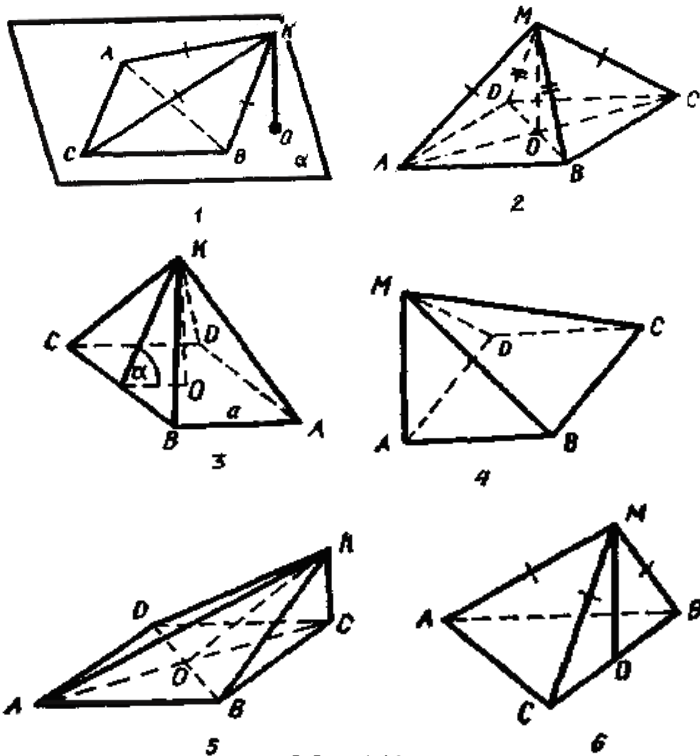
Довести: MO – висота піраміди.

3) У правильній піраміді двогранний кут при ребрі BC дорівнює α (мал.149(3)). Чому дорівнює висота піраміди KO ?

4) Дано: $ABCD$ – квадрат, MA – висота піраміди (мал.149(4)). Довести: площини MBC і MAB перпендикулярні.

5) Дано: $ABCD$ – ромб, KC – висота піраміди (мал.149(5)). Довести: $KO \perp BD$.

6) Всі бічні ребра піраміди рівні між собою, MO – висота піраміди. Що можна сказати про кути трикутника ABC (мал.149(6))?



Мал.149

Задачі на дослідження

- 453. Скільки вершин, ребер і граней має n -кутна піраміда?
- 454. Яку основу може мати піраміда, у якої всі ребра рівні?
- 455. У яких межах знаходиться плоский кут α при вершині правильної n -кутної піраміди, якщо $n = 3, 4, 5, 6$?
- 456. У трикутній піраміді всі бічні ребра рівні. Чи може висота такої піраміди знаходитися на одній з граней?

457. Порівняйте терміни: «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр». Чи можна стверджувати, що вони означають одне і те ж?

458. Бічні ребра піраміди рівні. Чи може її основою бути:
а) прямокутна трапеція, б) ромб?

459. При якому співвідношенні в правильній трикутній піраміді між стороною основи a і бічним ребром b її можна побудувати?

460. Чи можна визначення зрізаної піраміди почати словами: «Зрізаною пірамідою називається піраміда, у якої...»?

461. Скільки ребер, перпендикулярних площині основи, може мати зрізана піраміда?

462. Яке найбільше число плоских прямих кутів може мати трикутна зрізана піраміда?

463. Скільки діагоналей можна провести в зрізаній п'ятикутній піраміді, в зрізаній п'ятикутній піраміді?

464. Скільки діагональних перерізів, що мають форму прямокутної трапеції, може мати зрізана піраміда: а) чотирикутна, б) п'ятикутна, в) n -кутна?

465. У якому випадку правильна зрізана піраміда може мати плоский кут бічної грані: а) 45° , б) 60° ?

466. Об'єм першої піраміди дорівнює 210 см^3 . Визначить об'єм другої піраміди, якщо площа її основи в 2 рази більша площі основи першої піраміди, а висота в три рази менша.

467. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні і мають довжини a , b , c . Обчисліть її об'єм.

468. Визначить об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a , а бічні ребра взаємно перпендикулярні.

469. В основі піраміди лежить ромб із стороною 6 см і кутом 60° . Висота піраміди дорівнює 10 см . Обчисліть її об'єм.

470. Визначить об'єм правильної шестикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 2 см , а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45° .

471. Пряму трикутну призму перетнули площиною так, що вона проходить через середину бічного ребра і не перетинає сторону нижньої основи. В результаті утворилась зрізана піраміда, об'єм якої дорівнює 20 см^3 . Знайдіть об'єм частини призми, яка залишилася.

472. Дано правильна трикутна піраміда, у якої a – сторона основи, h – висота, S – площа основи, V – об'єм. Заповніть порожні

комірки в табл. 16.

Таблиця 16

№	a	h	S	V
1.	7	12		
2.	8			$128\sqrt{3}$
3.		20	$25\sqrt{3}$	
4.		18		$216\sqrt{3}$
5.			$64\sqrt{3}$	$640\sqrt{3}$

473. Дано правильна чотирикутна піраміда, у якої a – сторона основи, h – висота, S – площа основи, V – об'єм. Заповніть порожні комірки в табл. 17.

Таблиця 17

№	a	h	S	V
1.	6	10		
2.	9			324
3.		14	144	
4.		18		600
5.			64	320

474. Піраміда, об'єм якої дорівнює 200 см^3 , перетинається площиною, що проходить через середину висоти піраміди паралельно основи. Визначить об'єм зрізаної піраміди.

475. Дано правильна трикутна зрізана піраміда, у якої a і a_1 – сторони нижньої і верхньої основ відповідно, h – висота, S і S_1 , – площі нижньої і верхньої основ відповідно, V – об'єм. Заповніть порожні комірки в табл. 18.

Таблиця 18

№	a	a_1	h	S	S_1	V
1.	5	3	9			
2.	4	2				$42\sqrt{3}$
3.		4	15	$9\sqrt{3}$		
4.			6	$8\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	
5.				$45\sqrt{3}$	$20\sqrt{3}$	855

476. Скільки можна побудувати правильних п'ятикутних пірамід заданого об'єму із заданою висотою?

477. Чи рівновеликі дві піраміди з рівними висотами, якщо їх

основами є чотирикутники з відповідними рівними сторонами?

478. Дана піраміда з висотою h . На якій відстані від її вершини треба провести переріз, паралельний основі, щоб об'єм цієї піраміди розділити навпіл?

479. У кубі з ребром a проведено переріз через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Як знайти об'єм меншої зрізаної частини?

480. Як зміниться об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо сторони основ збільшити в 2 рази, а висоту зменшити в 2 рази?

481. Обчисліть об'єм правильної зрізаної трикутної піраміди, якщо відомі сторони основ, а також: а) кут нахилу бічного ребра до більшої основи; б) бічне ребро?

482. Дана модель: а) правильної трикутної зрізаної піраміди; б) правильної чотирикутної зрізаної піраміди. Які елементи моделі необхідно виміряти, щоб обчислити її об'єм?

483. Чи існує піраміда, у якої 101 ребро? Чому?

484. Чи існує піраміда, у якої немає жодного тригранного кута?

485. Визначить без малюнка:

- 1) скільки вершин, ребер і граней має n -кутна піраміда;
- 2) скільки всього плоских кутів має n -кутна піраміда.

486. Чи існує піраміда, у якій неможливо провести жодної апофеми?

487. Скільки всього діагональних перерізів можна провести у п'ятикутній піраміді?

488. Чи можна розрізати трикутну призму (мал.150) на дві частини так, щоб кожна частина була пірамідою?



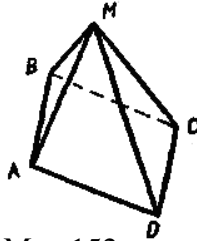
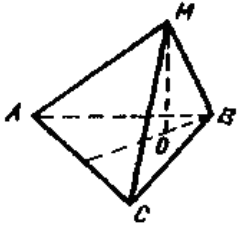
Мал.150

489. Чи можна склеїти такий многогранник, щоб коли його поставити на одну грань, то це – призма, а якщо поставити на другу грань, то це – піраміда?

490. Чи існує піраміда, у якої немає жодного діагонального перерізу?

491. Скільки площин симетрії має правильна чотирикутна піраміда; правильна трикутна піраміда?

492. У піраміді $MABC$ на мал.151 MO – висота. Чи можна вважати, що дана піраміда правильна?



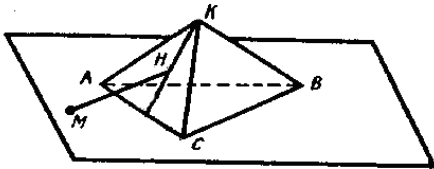
493. Мал.151 Які виміри треба зробити, щоб визначити висоту у моделі правильної піраміди? Мал.152 Які треба виконати обчислення?

494. «Мені необхідно склеїти з картону модель піраміди, у якій в основі лежить ромб з кутом 60° , а всі бічні ребра рівні між собою»,— сказав учень A . «Такої піраміди існувати не може», – заперечив учень B . Чи правильне твердження учня B ?

495. На мал.152 дано правильну піраміду. Грані AMD і CMD утворюють двогранний кут з ребром MO . Чи утворюють двогранний кут грані AMB і CMD ? Якщо так, то де ребро цього кута?

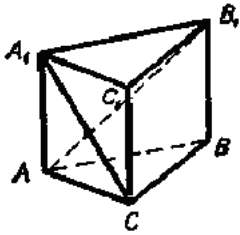
496. Дано піраміду, у якій основа – прямокутник (не квадрат), а висота проходить через точку перетину діагоналей основи. Які з властивостей цієї піраміди такі самі, як у правильній? Які властивості відмінні від властивостей правильної піраміди?

497. На площині α (вона збігається з площиною ABC) взято точку M і проведено пряму MH , яка перетинає грань AKC у точці H (мал.153). Яку з граней AKB чи BKC перетинає ця пряма? Де саме?



Мал.153

498. На мал.154 Обчисліть три трикутні піраміди.



Мал.154



Мал.155

499. Чи існує зрізана піраміда, у якої всі ребра рівні між собою?

500. Чи можна вважати, що зрізана піраміда є окремим випадком піраміди?

501. Чому правильну чотирикутну піраміду не можна назвати правильним многогранником?

502. Два однакових правильних тетраедри склеїли по одній з граней (мал.155). Чи буде утворена фігура правильним многогранником? Чому?

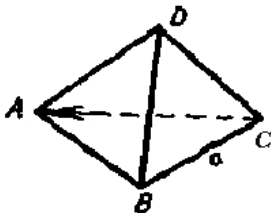
503. Порівняйте два терміни: «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр». Чи можна стверджувати, що вони означають одне й те саме?

504. Дано многогранник. З одного боку – це правильна призма, з другого – неправильний многогранник.

1) Які властивості многогранника впливають з того, що він є правильною призмою?

2) Які властивості впливають з того, що це неправильний многогранник?

505. На мал.156 зображено правильний тетраедр. Чому дорівнює $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CA}$.



Мал.156

506. Скільки 5-гранних кутів має ікосаедр? Покажіть на моделі.

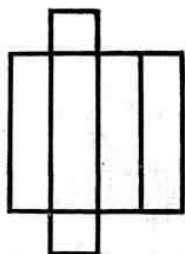
507. Скільки тригранних кутів має додекаедр? Покажіть на моделі.

508. Скільки ребер може виходити з однієї вершини

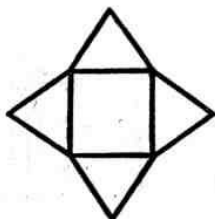
правильного многогранника? Покажіть на моделях.

509. Як пояснити, що формулу об'єму зрізаної піраміди можна застосувати для обчислення об'єму і піраміди, і призми?

510. На мал.157 подано розгортки двох геометричних тіл. Які треба знати виміри, щоб обчислити об'єми цих тіл?



1



2

Мал.157

Циліндр

Задачі на обчислення

511. Осьовий переріз циліндра – квадрат із стороною a . Обчисліть об'єм циліндра.

512. Довжини двох круглих колод рівні, а їхні діаметри відносяться як 2:3. Як відносяться їхні об'єми?

513. Визначить об'єм тіла, одержаного в результаті обертання квадрата із стороною a біля однієї з його сторін.

514. У мензурку циліндричної форми, внутрішній діаметр якої 10 см, опустили металеву деталь. При цьому рівень води в мензурці піднявся на 6 см. Обчисліть об'єм деталі.

515. Один циліндр у 3 рази товщий за другий, але у 3 рази коротший. Чи однакові у них об'єми?

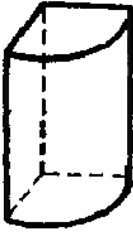
516. Дано прями́й круговий циліндр, у якого буквою r позначений радіус основи, h – висота, $S_{осн}$ – площа основи $S_{біч}$ і S – відповідно площа бічної поверхні і площа повної поверхні, V – об'єм циліндра. Заповніть порожні комірки в табл. 19.

Таблиця 19

№	r	h	$S_{осн}$	$S_{біч}$	S	V
1.	5	7				
2.	4			40π		
3.		11	4π			
4.		20				1280π

517. На мал.158 зображено тіло, яке становить четверту частину

циліндра радіуса R і висоти H . Чому дорівнює повна поверхня тіла?



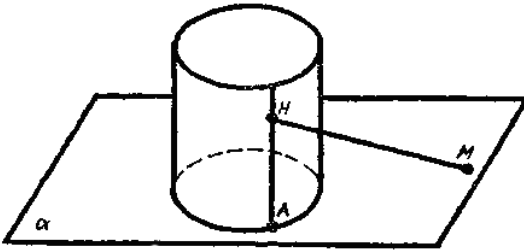
Мал.158

Задачі на побудову

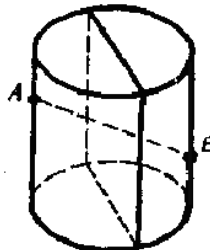
518. Побудуйте переріз циліндра, що ділить його на два рівновеликі циліндри.

519. Побудуйте зображення циліндра, висота якого дорівнює висоті даного циліндра, а об'єм в 4 рази більший.

520. Побудуйте зображення циліндра, у якого число, яке виражає об'єм, дорівнює числу, яке виражає площу його бічної поверхні.



Мал.159



Мал.160

521. Циліндр розміщений на площині α (мал.159). На цій самій площині взято точку M . Де пряма MN вдруге перетне поверхню циліндра?

522. Де відрізок AB перетинає площину даного осевого перерізу циліндра (мал.160)?

Задачі на доведення

523. Доведіть, що об'єми циліндрів, утворених в результаті обертання одного і того ж прямокутника навколо кожної з нерівних сторін, відносяться як сторони прямокутника.

524. Доведіть, що об'єми двох різних рівносторонніх циліндрів відносяться як куби радіусів їх основ.

525. Доведіть, що об'єми двох циліндрів, площі бічних

поверхонь яких рівні, відносяться як їх радіуси.

526. Площа бічної поверхні кожного з двох циліндрів дорівнює сумі площ основ. Доведіть, що об'єми цих циліндрів відносяться як куби їх висот.

527. Доведіть, що об'єм циліндра, в осьовому перерізі якого – квадрат із стороною a , дорівнює приблизно 0,8 об'єму куба з ребром a .

528. Доведіть, що об'єм циліндра з радіусом r і висотою h приблизно дорівнює $\frac{22}{7}$ об'єму правильної чотирикутної призми тієї ж висоти, із стороною основи, рівною r . Ім'ям якого видатного математика було назване це число?

529. Доведіть, що якщо радіус основи циліндра збільшити в 2 рази, а висоту зменшити в 4 рази, то об'єм циліндра не зміниться.

530. Доведіть що об'єм циліндра дорівнює добутку площі його бічної поверхні на половину радіусу.

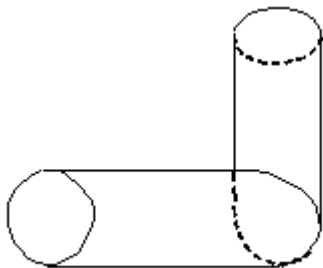
531. Осьовий переріз циліндра – квадрат. Доведіть, що повна поверхня цього циліндра у 6 разів більша за площу його основи.

Задачі на дослідження

532. У скільки разів треба збільшити: а) висоту циліндра, не змінюючи його радіус; б) радіус циліндра не змінюючи його висоту, щоб об'єм циліндра збільшився в 2, 3, ..., n раз?

533. Як відносяться об'єми циліндрів і їх моделей, зменшених в масштабі 1:2; 1:3; 1: n ?

534. Як знайти об'єм колінчастої труби, зробленої з двох різних частин циліндра (мал.161)?



Мал.161

535. Паралельно осі циліндра проведена площина, яка ділить основу на частини у відношенні 2:3. У якому відношенні ця площина ділить об'єм циліндра?

536. Як визначити об'єм тіла, одержаного в результаті обертання квадрата навколо осі, яка проходить поза цим квадратом

паралельно однієї з його сторін?

537. Якою формулою виражається об'єм порожнистого циліндра, що має висоту h , зовнішній радіус R і внутрішній радіус r ?

538. Дано дві каструлі циліндричної форми: перша вузька і висока, а друга – вдвічі ширша, але вдвічі нижча за першу. Яка з каструль має більшу місткість?

539. Як відносяться об'єми двох різних циліндрів, що мають рівні висоти; рівні діаметри основ?

540. Чи можна за відомою площею бічної поверхні циліндра знайти його об'єм?

541. Наведіть кілька прикладів побутових предметів, які мають форму циліндра.

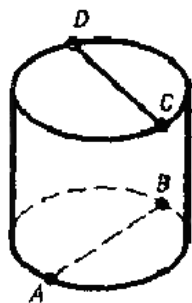
542. Які виміри і як необхідно зробити, щоб знайти висоту і радіус моделі циліндра?

543. Із стопки картону взяли лист і вирізали круг. Отримали циліндр з дуже малою висотою. Як практично визначити його висоту?

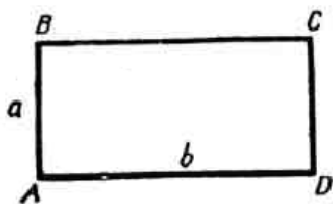
544. Кусок тонкого дроту можна вважати циліндром, у якого радіус дуже малий. Як практично визначити цей радіус?

545. Назвіть властивості циліндра, однакові з властивостями прямої призми.

546. Як знайти відстань між прямими AB і CD (мал.162)?



Мал.162



Мал.163

547. Аркуш паперу (мал.163) можна двома способами згорнути так, що утвориться поверхня кругового циліндра. Чому дорівнює радіус кожного із цих циліндрів?

548. Яке взаємне розміщення осі циліндра і площини, яка дотична до циліндра? Відповідь поясніть.

549. Чи має циліндр площини симетрії; осі симетрії; центри симетрії?

550. Запишіть формули для обчислення об'єму і бічної поверхні

циліндра. Чи існує такий циліндр, у якого бічна поверхня містить стільки ж квадратних одиниць, скільки у його об'ємі кубічних одиниць?

551. Чи правильне твердження: «Щоб знайти площу бічної поверхні циліндра, зовсім не обов'язково знати радіус R і висоту H . Досить знати площу осевого перерізу циліндра?»

Конус

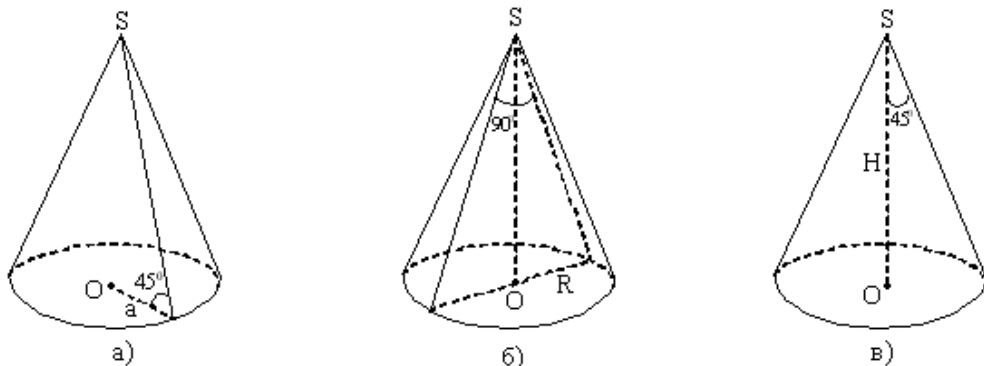
Задачі на обчислення

552. Діаметр основи конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осевого перерізу – 90° . Обчисліть об'єм конуса.

553. Основи осевого перерізу зрізаного конуса рівні 2 дм і 4 дм, а його бічні сторони нахилені до площини основи під кутом 45° . Обчисліть об'єм зрізаного конуса.

554. Осевий переріз конуса – рівнобедрений прямокутний трикутник з площею 9 м^2 . Обчисліть об'єм конуса.

555. Обчисліть об'єми конусів, зображених на мал.164.



Мал.164

556. Осевий переріз конуса – правильний трикутник із стороною a . Обчисліть об'єм конуса.

557. Дано конус, у якого r – радіус основи, h – висота, l – твірна, $S_{\text{біч}}$ – площа бічної поверхні, S – площа повної поверхні, V – об'єм конуса. Заповніть порожні комірки в табл. 20.

Таблиця 20

№	r	h	l	$S_{\text{біч}}$	S	V
1.	4	3				
2.	3		5			

3.	6			60π		
4.				65π	90π	

558. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною – 10 см. Обчисліть об'єм конуса.

559. Об'єм конуса дорівнює 176 дм^3 , висота – 42 дм, $\pi \approx \frac{22}{7}$.

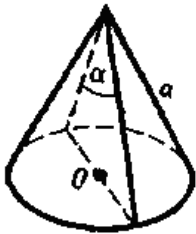
Обчисліть радіус основи.

560. Дано зрізаний конус, у якого R, r – радіуси нижньої і верхньої основ, h – висота, l – твірна зрізаного конуса $S_{\text{біч.}}$ – площа бічної поверхні, S – площі повної поверхні, V – об'єм зрізаного конуса. Заповніть порожні комірки в табл. 21.

Таблиця 21

№	R	r	h	l	$S_{\text{біч}}$	S	V
1.	4	1	4				
2.	6	2			40π		
3.		3	12	13			

561. Яка площа основи конуса на мал.165?



Мал.165

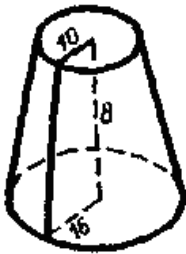


Мал.166

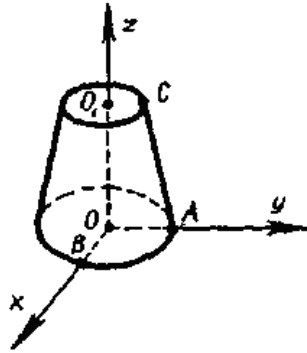
562. Обчисліть висоту зрізаного конуса на мал.166.

563. Чому дорівнює твірна на мал.167?

564. Радіуси основ зрізаного конуса (мал.168) дорівнюють 6 см і 3 см, а висота 7 см. Обчисліть координати точок O, A, B, C .



Мал.167

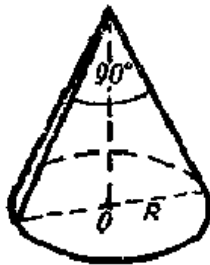


Мал.168

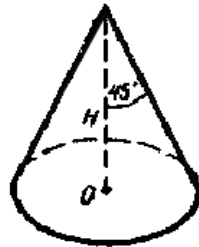
565. Які об'єми конусів на мал.169?



1



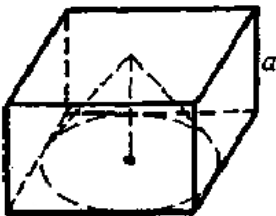
2



3

Мал.169

566. На мал.170 у куб вписано конус. Обчисліть об'єм конуса.



Мал.170



Мал.171

567. На мал.171 трикутник ABC – правильний, сторона його дорівнює a . Обчисліть об'єм конуса.

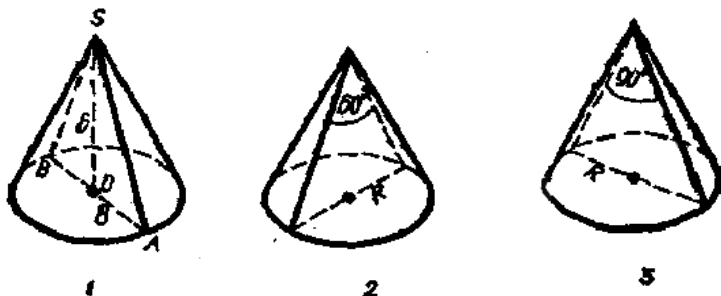
568. Конус, висота якого H , вилитий із свинцю. Його потрібно переплавити у циліндр того ж радіуса. Якою буде висота циліндра?

569. Свинцеву кулю розплавляли і переливали в кульки, радіус яких у 10 разів менший від початкового. Скільки таких кульок дістали?

570. Дано свинцеві кульки однакового розміру. Необхідно із них відлити кулю радіусом більшим у 5 разів. Скільки маленьких кульок для цього потрібно?

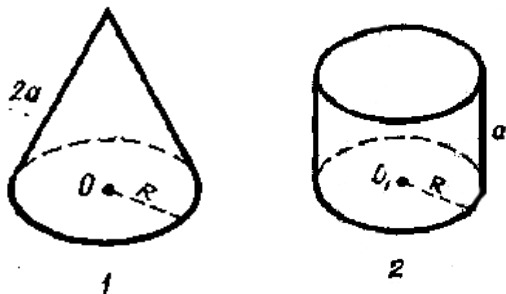
571. Бічна поверхня конуса дорівнює 8. Через середину його висоти паралельно основі проведено переріз. Чому дорівнює бічна поверхня утвореного зрізаного конуса?

572. Обчисліть бічну поверхню кожного з конусів на мал.172.



Мал.172

573. Порівняйте бічні поверхні тіл на мал.173.



Мал.173

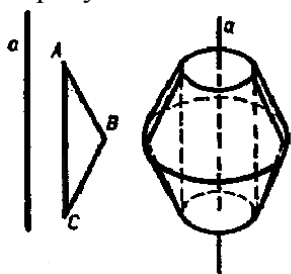
Задачі на побудову

574. Дано зображення конуса об'єму V , твірна якого нахилена до основи під кутом 30° . Побудуйте зображення нового конуса, об'єм якого в 8 разів більший, а твірна також нахилена під кутом 30° .

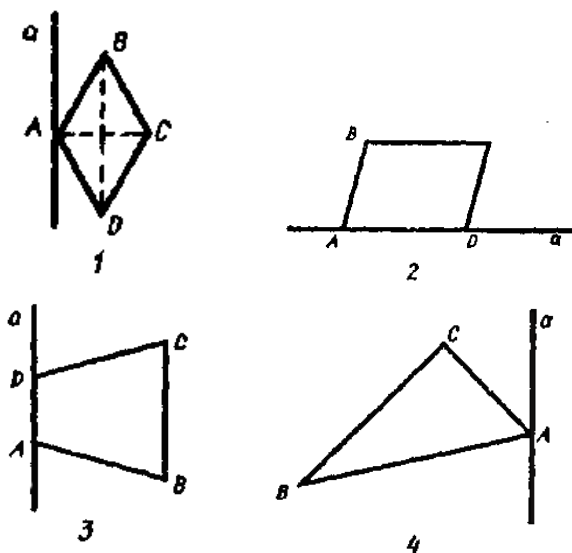
575. Побудуйте переріз конуса площиною, паралельною основі і що відтинає конус, об'єм якого дорівнює $\frac{1}{8}$ об'єму даного конуса.

576. У результаті обертання трикутника ABC навколо прямої a утворюються тіло, яке утворюється з двох зрізаних конусів і має циліндричний отвір (мал.174). Намалюйте від руки тіла, які

утворюються в результаті, обертання навколо прямої a фігур, поданих на мал.175, і охарактеризуйте їх.



Мал.174



Мал.175

Задачі на доведення

577. Доведіть, що якщо елементи конуса зменшити в 2 рази, то його об'єм зменшиться в 8 разів.

578. Доведіть, що об'єми двох різних конусів, які мають рівні висоти, відносяться як квадрати їх радіусів основ.

579. Квадрат $ABCD$ обертається навколо сторони CD . Доведіть, що об'єм тіла, одержаного в результаті обертання трикутника ABD , в два рази більший об'єму тіла, одержаного в результаті обертання трикутника BCD .

580. Доведіть, що у двох рівносторонніх конусів радіуси основ не завжди рівні.

581. Доведіть, що об'єм конуса, радіус основи якого R , а твірна

нахилена до площини основи під кутом 45° , дорівнює $\frac{\pi R^3}{3}$.

582. Доведіть, що об'єм зрізаного конуса, радіуси нижньої і верхньої основ якого рівні R і r , а твірна нахилена до площини основи під кутом 45° , дорівнює $V = \frac{1}{3}(R^3 - r^3)$.

Задачі на дослідження

583. Виразіть об'єм конуса через його діаметр і висоту.

584. Два конуси одержані в результаті обертання нерівнобедреного прямокутного трикутника навколо кожного з його катетів. Чи рівні об'єми цих конусів?

585. Два тіла одержані в результаті обертання однієї і тієї ж рівнобічної трапеції навколо кожної з її паралельних сторін. Чи рівні об'єми одержаних тіл обертання?

586. Свинцевий конус, висота якого дорівнює h , переплавлений в циліндр з тією ж основою. Яку висоту має одержаний циліндр?

587. Іграшкове відерце у формі зрізаного конуса має розміри, які в 6 разів менше відповідних розмірів справжнього відра. У скільки разів місткість відерця менша місткості відра?

588. Зрізаний конус з висотою h , радіусами нижньої та верхньої основ R та r і конус з тією ж висотою рівновеликі. Як знайти радіус основи конуса?

589. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму конуса.

590. Що означає слово «конус»?

591. Чи має конус, центр симетрії; площини симетрій, осі симетрії?

592. У конус вписана трикутна піраміда (мал.176). Чи можна стверджувати, що трикутник ABC тупокутний?



Мал.176

Куля

Задачі на обчислення

593. Свинцеву кулю, діаметр якої 20 см, переплавили в кульки з діаметром в 10 разів меншим. Скільки таких кульок вийшло? Які дані в задачі зайві?

594. Дано свинцеві кульки з діаметром 5 мм. Скільки таких кульок потрібно, щоб відлити свинцеву кулю з діаметром 3 см?

595. З дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи, виточена куля найбільшого радіусу. Скільки відсотків матеріалу сточено?

596. Об'єм однієї кулі утворює $2\frac{10}{27}$ об'єму іншого. Визначить відношення їхніх радіусів.

597. Обчисліть радіус кулі об'єму 36π дм³.

598. Дано куб з ребром a . Обчисліть об'єм кулі: а) вписаного в куб; б) описаного навколо куба.

599. Переріз кулі площиною, віддаленою від центру кулі на відстань 8 см, має радіус 6 см. Обчисліть об'єм кулі.

600. Площі поверхонь двох куль відносяться як 4:9. Об'єм другої кулі дорівнює 54 см³. Обчисліть об'єм першої кулі.

601. Обчисліть площу півсфери радіусу 5 см.

602. В скільки разів більше буде потрібно золота, щоб покрити сусальним золотом кулю діаметром 25 см, ніж кулю діаметром 15 см?

603. Площа сфери дорівнює $3,14$ дм². Обчисліть її радіус.

604. Площа перерізу кулі найбільшого радіусу дорівнює Q . Обчисліть площу поверхні кулі.

605. Площа поверхні півкулі на Q більша площі її основи. Обчисліть площу сфери того ж радіусу, що й у півкулі.

606. Поверхні двох куль відносяться як $m:n$. Як відносяться їх об'єми?

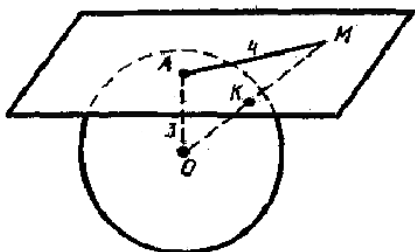
607. Поверхні двох куль відносяться як 4:9. Обчисліть відношення їх діаметрів.

608. Дано куля, у якої R – радіус, S – площа поверхні, V – об'єм. Заповніть порожні комірки в табл. 22.

Таблиця 22

№	R	S	V
1.	4		
2.		144π	
3.			4500π

609. На дотичній площині до сфери взяли точку M і з'єднали з центром сфери O (мал.177). Відрізок MO перетнув сферу у точці K . Чому дорівнює довжина відрізка MC ?

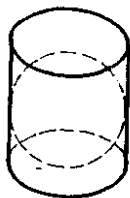


Мал.177

610. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 161$ і точку $A(2;1;2)$. Чи лежить точка A на сфері, всередині або зовні кулі, яка визначена цією сферою?

611. Сфера, центр якої знаходиться у точці $C(1;2;2)$, проходить через початок координат. Запишіть рівняння сфери.

612. У циліндр (мал.178) вписана куля радіуса R . Обчисліть відношення об'ємів цих тіл.



Мал.178

613. Обчисліть площу поверхні півкулі радіуса R .

614. Об'єм кулі зменшили у 27 разів. Як змінилася площа його поверхні?

615. Чи правильно, що сума площ двох сфер радіуса R точно дорівнює площі сфери радіуса $2R$?

616. Фарби вистачає, щоб пофарбувати поверхню кулі радіуса R . Яку кількість куль радіуса $\frac{R}{10}$ можна пофарбувати цією фарбою, якщо товщина шару фарби та сама?

Задачі на побудову

617. Побудуйте зображення кулі, концентричної даній, яка займає $\frac{1}{8}$ об'єму даної кулі.

618. Куля радіусу r концентрична з кулею більшого радіусу R .

Побудуйте зображення зрізаного конуса, об'єм якого дорівнює різниці об'ємів більшої кулі і меншої, а радіуси основ дорівнюють R і r .

619. Дано циліндр, радіус основи якого дорівнює R , а висота – $2R$. Побудуйте зображення кулі, об'єм якої дорівнює $\frac{2}{3}$ об'єму даного циліндра.

620. Побудуйте зображення конуса, об'єм якого дорівнює об'єму даної кулі.

621. Площа перерізу кулі на мал.179 утворює з радіусом OA кут α . Як зобразити цей кут на малюнку?



Мал.179

622. Побудуйте зображення кулі, у якої числа, що виражають об'єм кулі і площу його поверхні, рівні.

623. Побудуйте січну площину, яка ділить поверхню кулі відношенні 1:3.

624. Дано зображення двох сфер з радіусами R_1 і R_2 . Побудуйте зображення сфери, площа якої дорівнює сумі площ даних сфер.

625. Побудуйте частину сферичної поверхні, яка дорівнює $\frac{1}{8}$ поверхні сфери.

Задачі на доведення

626. Доведіть, що об'єм кулі дорівнює об'єму такого конуса, висота якого дорівнює радіусу кулі, а радіус основи дорівнює діаметру кулі.

627. Доведіть, що об'єм кулі в 1,5 рази менший об'єму описаного навколо нього циліндра.

628. Діаметр однієї кулі дорівнює радіусу іншого. Доведіть, що відношення їх об'ємів дорівнює 1:8.

629. Діаметр однієї кулі утворює половину радіусу іншого. Доведіть, що їхні об'єми відносяться як 1:64.

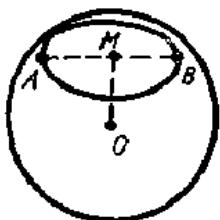
630. Доведіть, що площа поверхні тіла, одержаного при обертанні квадрата навколо його сторони, дорівнює площі поверхні кулі радіусу, що дорівнює стороні квадрата.

631. Куля ділиться трьома взаємно перпендикулярними великими кругами на 8 частин. Доведіть, що відношення площі поверхні кожної частини до площі поверхні кулі дорівнює 5:16.

632. Доведіть, що площі поверхонь кулі і півкулі відносяться як 4:3.

633. Доведіть, що площі сфер, одна з яких вписана в куб, а інша описана навколо цього куба, відносяться як 1:3.

634. A і B – дві точки сфери (мал.180), M – середина відрізка AB , O – центр сфери. Доведіть, що $OM \perp AB$.



Мал.180

635. З точки M до сфери проведені дотичні MA і MB . Доведіть, що $MA=MB$.

Задачі на дослідження

636. Кому більше дістанеться: тим, хто їстиме кавун радіусом 10 см утрюх або тим, хто їстиме кавун радіусом 20 см увісьмох?

637. Чи можна в посудину циліндричної форми з висотою в два рази більшого радіусу основи помістити кулю, об'єм якої в два рази менший, ніж об'єм посудини.

638. Діаметр першого кавуна удвічі більший діаметра другого. Який з них важче і в скільки разів?

639. Пересипаючи пісок з чаші у формі півкулі радіусу r в чашу у формі конуса, радіус і висота якого рівні r , учень дійшов висновку, що об'єм півкулі в два рази більше об'єму конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?

640. Що являє собою тіло, яке утворюється із усіх точок, віддалених від даної точки O на відстань не меншу за 3 м, але не більшу за 7 м?

641. Два перерізи кулі площинами мають рівні площі. Чи правильно, що площини цих перерізів однаково віддалені від центра сфери?

642. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ і площину $x+y+3z=0$. Чи можна, не проводячи обчислень, визначити радіус кола, по якому

площина перетинає сферу?

643. Виразіть радіус кулі через її об'єм.

644. Як зміниться площа S сфери, якщо її радіус: а) збільшити в 2 рази; б) зменшити на 25%?

645. Чи вірно, що сума площ двох сфер радіусу R дорівнює площі сфери радіусу $2R$?

646. Чому при падінні крапля рідини приймає форму близьку до кулі?

647. Виразіть об'єм V кулі через площу S його поверхні і радіус R ; площу поверхні кулі через його об'єм V і радіус R .

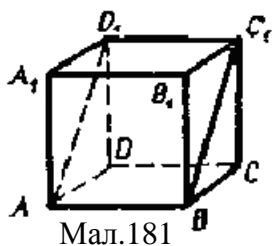
648. У якому випадку витрачається більше матеріалу: на нікелювання однієї кулі діаметром 8 см або на нікелювання 15 куль діаметром 2 см кожна?

Закріплення матеріалу до Розділу 2

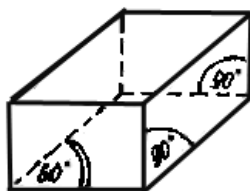
Задачі на обчислення

649. Двогранний кут має 100° . Чому дорівнює кут між площинами граней цього кута?

650. У кубі проведено діагональний переріз (мал.181). Розгляньте двогранні кути, утворені цим перерізом з ребром C_1D_1 . Обчисліть їх лінійні кути.



Мал.181



Мал.182

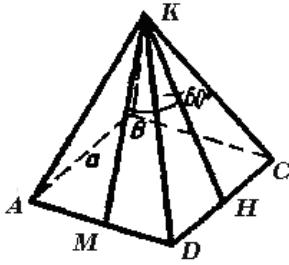
651. Який приблизно об'єм вашої класної кімнати?

652. Кожне ребро призми (мал.182) дорівнює a . Чому дорівнює її об'єм?

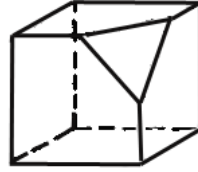
653. Площа бічної поверхні правильної піраміди у 2 рази більша за площу основи. Під яким кутом нахилені бічні грані до площини основи?

654. Як зміниться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторону її основи збільшити у 3 рази, а висоту зменшити у 2 рази?

655. У правильній піраміді на мал.183 проведені апофемі KM і KH . Який об'єм піраміди?



Мал.183



Мал.184

656. У циліндричній посудині рівень рідини досягає 16 см. На якій висоті буде знаходитися рівень рідини, якщо її перелити у посудину, діаметр якої у 2 рази більший за діаметр першої?

657. Радіус циліндра збільшили у два рази, а його висоту зменшили у два рази. Чи зміниться площа бічної поверхні циліндра? Якщо так, то як?

658. Площа великого круга кулі дорівнює 5. Чому дорівнює площа сфери цієї кулі?

659. Матеріал для фарбування дитячого м'яча коштує 10 грн. Скільки коштуватиме такий же матеріал для фарбування м'яча, об'єм якого у 8 разів більший?

660. Від куба з ребром 10 см відрізали тіло площиною, яка проходить через середини трьох ребер (мал.184). Обчисліть об'єм зображеного тіла.

Задачі на побудову

661. Площина, що проходить через середини трьох ребер куба, відтинає кут, як показано на мал.184. Зробіть від руки ескіз розгортки утвореної поверхні.

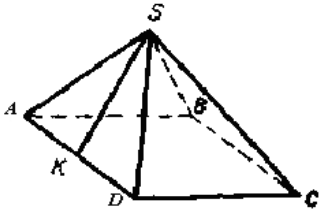
662. Накресліть многогранник, у якого всі грані – трикутники, але який би не був трикутною пірамідою.

663. Накресліть многогранник, у якого всі грані – квадрати, але не куб.

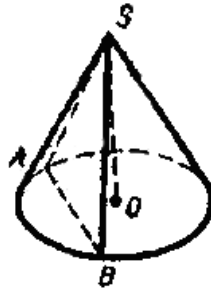
664. Намалюйте многогранник, у якого 6 вершин і 5 граней.

665. Намалюйте многогранник, у якого число вершин і число граней однакове.

666. У правильній піраміді на мал.185 апогема утворює з площиною основи кут β . Як зобразити цей кут на малюнку?



Мал.185



Мал.186

667. Дано зображення циліндра. Але центри основ не позначені. Як побудувати точне зображення осі циліндра?

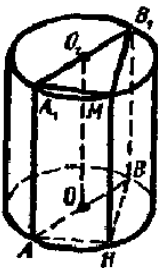
668. Переріз конуса (мал.186) утворює з площиною основи кут α . Побудуйте кут α на малюнку.

Задачі на доведення

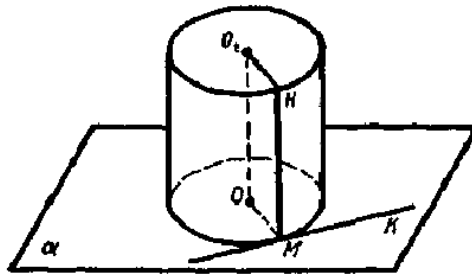
669. Доведіть способом від супротивного: «Якщо у паралелепіпеді з ребрами a, b, c і діагоналлю d виконується нерівність $d^2 \neq a^2 + b^2 + c^2$, то цей паралелепіпед не прямокутний».

670. AA_1B_1B – осьовий переріз циліндра (мал.187), MH – довільна твірна. Доведіть, що двогранний кут з ребром MH прямий.

671. Циліндр розміщений на площині α (мал.188), пряма MK – дотична до кола нижньої основи. Доведіть, що пряма MK перпендикулярна до площини OMH .

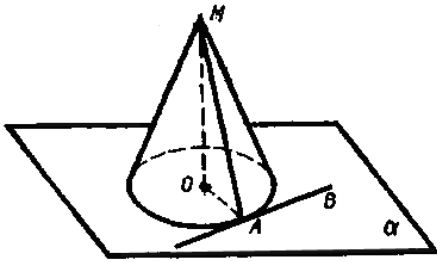


Мал.187

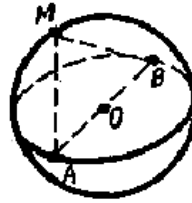


Мал.188

672. AB – дотична до кола основи конуса (мал.189). Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини AOM .



Мал.189



Мал.190

673. A і B – діаметрально протилежні точки сфери (мал.190), M – довільна точка поверхні. Доведіть, що $\angle AMB=90^\circ$.

Задачі на дослідження

674. Об'єм тіла дорівнює a см³. Як його виразити у кубічних метрах?

675. Чи вміститься у квартирній ванні кубічний метр води?

676. Звичайне відро вміщує приблизно 12 літрів. Скільки необхідно відер води, щоб налити кубічний метр води?

677. Якої висоти буде стовпчик, якщо кубічний метр розрізати на кубічні міліметри і всі ці кубики поставити один на одного?

678. Тіло P складено з двох тіл P_1 і P_2 . Об'єми цих тіл дорівнюють V_1 і V_2 , причому вони мають спільну частину з об'ємом V_3 . Який об'єм тіла P ?

679. Як дізнатися, скільки крапель води міститься у відрі?

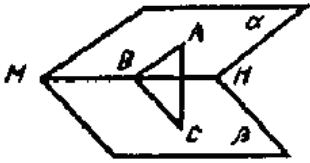
680. Іграшкове відерце має розміри у 10 разів менші, ніж відро місткістю 12 л води. Чи вміститься в це відерце склянка води?

681. Обчисліть об'єм хокейної шайби у кубічних сантиметрах, виконавши потрібні вимірювання.

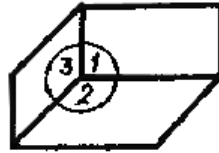
682. На базарі продаються кавуни маленькі й великі (за розміром у два рази більші). Вартість маленьких кавунів 1 грн 30 коп., а великих 1 грн. 90 коп. Що вигідно купити: один великий чи три маленьких кавуни?

683. Щоб побудувати лінійний кут двогранного кута, проводять площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута. Чи перпендикулярна ця площина граням двогранного кута?

684. Дано двогранний кут з ребром MN (мал.191) на півплощині α взято довільну точку A і з неї проведені перпендикуляр AB до ребра MN і перпендикуляр AC до півплощини β . Точки B і C з'єднано. Чи можна стверджувати, що ABC – лінійний кут даного двогранного кута?



Мал.191



Мал.192

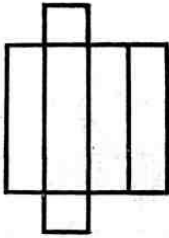
685. На мал.192 зображено тригранний кут, всі плоскі кути якого прями. Чи будуть всі двогранні кути цього кута також прямі?

686. Дано модель многогранника, який називається октаедром. Чому він так називається? Скільки у нього вершин; ребер; двогранних кутів?

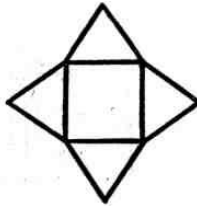
687. Не користуючись малюнком, визначіть, скільки двогранних кутів у трикутній призмі; у трикутній піраміді.

688. Яке мінімальне число ребер може мати многогранник?

689. На мал.193 зображена розгортка многогранника. Визначіть, скільки у нього вершин; ребер; граней.



1



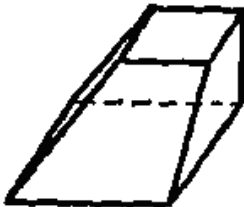
2

Мал.193

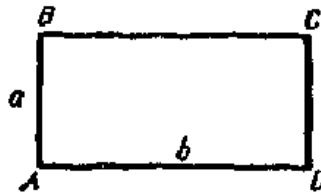
690. Чи існує призма, в якій немає жодної діагоналі?

691. Чи є які-небудь спільні властивості у піраміді і призми?

692. Чи правильно зображено зрізану пірамідку на мал.194?



Мал.194



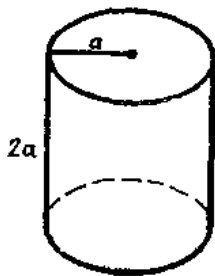
Мал.195

693. Чи правильно, що коли навколо сфери описати циліндр, то його бічна поверхня дорівнюватиме площі сфери?

694. Обертаючи прямокутник (мал.195) спочатку навколо сторони AB , а потім навколо сторони AD , дістанемо два різних циліндри. У якому випадку бічна поверхня буде більша?

695. Назвіть спільні властивості піраміди і конуса.

696. Чи можна у циліндричну посудину (мал.196) помістити кулю, об'єм якої у два рази менший, ніж об'єм посудини?



Мал.196

697. Чи можлива така куля, об'єм і площа поверхні якої виражаються одним і тим самим числом?

Вказівки, розв'язування та відповіді до вибраних задач

269-270. Вказівка. Під час розв'язування слід використовувати формули для обчислення елементів куба із стороною a :

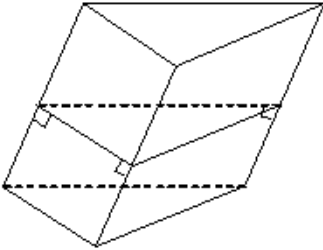
$$d = a\sqrt{2}, \quad D = a\sqrt{3}, \quad s = a^2 = \frac{d^2}{2}, \quad Q = d \cdot a.$$

275. Розв'язування. Площа основи дорівнює

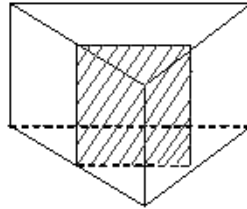
$$S = \frac{40 - 32}{2} = 4 (\text{см}^2), \text{ сторона основи } - 2 \text{ см, периметр основи } P = 8 \text{ см,}$$

$$\text{а висота призми } h = \frac{S_{\text{б}}}{P} = \frac{32}{8} = 4 (\text{см}).$$

276. Розв'язування. Перпендикулярний переріз призми – трикутник (мал.197), периметр якого $2+3+4=9$ (см), тому бічне ребро дорівнює $45:9=5$ (см).



Мал.197



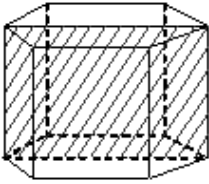
Мал.198

277. Розв'язування. Утворений переріз – прямокутник, у якого одна сторона дорівнює бічному ребру, а інша – половина сторони основи (мал.198). Отже, його площа в 2 рази менша площі бічної грані. Отже, площа бічної грані 50 см^2 , а бічної поверхні: $50 \cdot 3 = 150 (\text{см}^2)$.

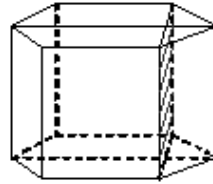
281. Розв'язування. Площа більшого діагонального перерізу (мал.199) $Q = 2a \cdot H$, $aH = \frac{Q}{2}$. Площа бічної поверхні дорівнює

$$6 \cdot \frac{Q}{2} = 3Q.$$

282. Розв'язування. Відношення площ діагональних перерізів (мал.199-200) дорівнює відношенню нерівних діагоналей правильного 6-кутника, сторона якого a : $S_1 : S_2 = 2a : a\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3}$.



Мал.199



Мал.200

284. Розв'язування. $S_{осн}=S_{пер}\cdot\cos 60^0$, $S_{пер} = \frac{50}{\cos 60^0} = 100(\text{см}^2)$.

285. Розв'язування. Знайдемо суму плоских кутів двох основ і всіх бічних граней: $180(n-2)\cdot 2+360n-720+360n=720(n-1)$.

286. Відповідь: 125.

287. Відповідь: а) 64 см^3 ; б) 64 см^2 .

288. Відповідь: ні, маса цього куба 152 кг.

289. Відповідь: а) $\sqrt{Q^3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{9} d^3$.

290. Відповідь: 8 куб. од.

291. Відповідь: 30 м.

292. Відповідь: $\frac{1}{2} d_1 d_2 h$.

293. Розв'язування. Нехай a , b , c – виміри даного паралелепіпеда, тоді $b^2 = ac$, $b = 4$, $V = abc = 16 \cdot 4 = 64 (\text{см}^3)$.

294. Відповідь: $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$, де a – ребро призми.

295. Відповідь: 45 см^3 .

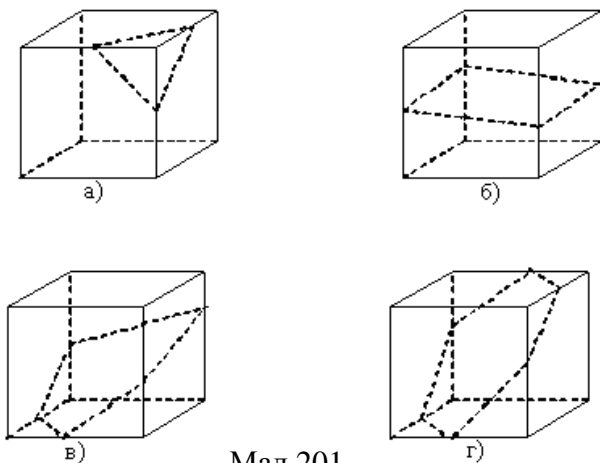
296. Відповідь: 30 см^3 .

297. Відповідь: 392 см^3 .

298. Відповіді: 1) $S=4\sqrt{3}$, $V=24$; 2) $S=16\sqrt{3}$, $h=S$; 3) $V=216$, $a=6\sqrt{2}$; 4) $S=36\sqrt{3}$, $a=12$; 5) $h=10$, $a=24$.

299. Відповіді: 1) $S=25$, $V=100$; 2) $S=64$, $h=7$; 3) $a=13$, $V=1859$; 4) $a=15$, $S=225$; 4) $a=20$, $h=15$.

312. Відповідь: відповідні перерізи дані на мал.201 а) – г).



Мал.201

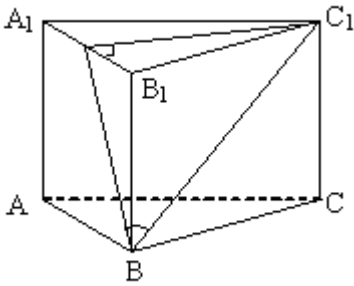
313. Відповідь: переріз може мати форму трикутника, трапеції.

314. Побудова. Проведемо з вершини A правильного трикутника ABC висоту AK . Точка K належить ребру BC . Відповідно відрізок MK перпендикулярний ребру BC . Кут MKA – шуканий.

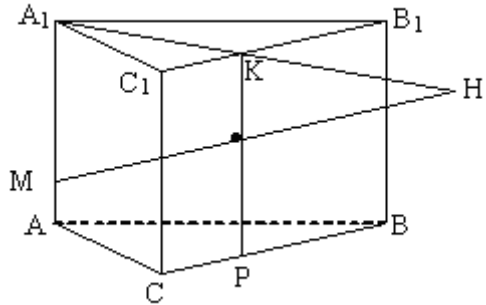
315. Побудова. Це кут між висотами трапецій $ABCD$ і ABC_1D_1 проведеними з їх загальної вершини тупого кута. (Використовуємо теорему про три перпендикуляри.)

316. Побудова. Слід використати теорему про три перпендикуляри. Шуканий кут – це кут між діагоналлю A_1B (або D_1C) бічної грані і стороною основи AB (або CD), який лежить в цій грані.

317. Побудова. Проведемо відрізок C_1D_1 , перпендикулярно грані AA_1B_1B ; відрізок BD_1 – проекція похилої BC_1 до грані AA_1B_1B ; $\angle C_1BD_1 = \alpha$ (мал.202).



Мал.202



Мал.203

318. Побудова. Ребро A_1A_1 , паралельне площині BCC_1 . Отже, лінія перерізу площин A_1MN і BCC_1 паралельна ребру AA_1 . В грані BCC_1B_1 проведемо відрізок KP паралельно ребру AA_1 (мал.203). Точка перерізу відрізків MN і KP і є точкою перерізу прямої MN з гранню призми.

321. Розв'язування. У основі призми проведемо середні лінії – отримаємо чотири рівні трикутники. Вони будуть основами трикутних призм з висотами, які рівні висотам даної призми.

322. Вказівка. Сторону основи призми, через яку не проходить дане бічне ребро, розділити двома точками на три рівні частини. Через одержані точки і бічне ребро провести площини.

330. Доведення. В основі лежить паралелограм з рівними діагоналями, тобто прямокутник, а бічне ребро перпендикулярне основі за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

331. Доведення. У n -кутній призмі бічних ребер n , а ребер нижньої і верхньої основ $2n$, всього $3n$ ребер.

332. Доведення. Розглянемо перпендикулярний переріз призми. У перерізі – чотирикутник, сума його кутів $S = 180^\circ(4-2) = 360^\circ$.

333. Доведення. Оскільки у призми дві грані основ, то бічних граней 16. Отже, в основі 16-кутник.

334. Доведення. $EN=EF=EK=FN=FK=NK$ як діагоналі граней куба.

335. Доведення. $a^2h^2 + b^2h^2 = h^2(a^2 + b^2) = h^2c^2$.

336. Доведення. В перерізі паралелепіпеда площиною, серед сторін багатокутника можна відшукати паралельні сторони, а у правильного п'ятикутника немає не паралельних двох сторін.

337. Розв'язування. Частина, що залишилася, – правильна

чотирикутна призма, сторона основи якої $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а висота – a . Її об'єм

$$V = \frac{1}{3}a^3.$$

339. Розв'язування. Нехай x, y, z – виміри паралелепіпеда, тоді $xy = S_1, xz = S_3, x^2y^2z^2 = S_1S_2S_3$. $V = xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

340. Розв'язування. Нехай V – об'єм даної призми. Площина, що проходить через середні лінії основ, відсікає трикутну призму об'єму

$$V_1 = \frac{1}{4}V, \text{ об'єм частини, що залишилася } V_2 = \frac{3}{4}V \text{ таким чином, } V_1:$$

$$V_2=1:3.$$

341. Розв'язування. Нехай a – сторона основи, h – висота, p і S – відповідно півпериметр і площа основи. Тоді $V = Sh = \frac{S}{p} \cdot ph = r \cdot \frac{S_{\text{біч.}}}{2}$.

342. Вказівка. Дві одержані призми мають рівновеликі основи і рівні висоти.

343. Вказівка. Дві одержані призми мають рівні висоти, а площі основ пропорційні сторонам, між якими розташована бісектриса.

344. Вказівка. Площину можна заповнити правильними трикутниками.

348. Відповідь: ні.

349. Розв'язування. Для обклеювання потрібні 6 квадратів із стороною 7 см. Даний прямокутник розрізати на два зі сторонами 7 см і 21 см, а потім кожний з них – на три квадрати зі стороною 7 см. Одержимо 6 потрібних квадратів, якими можна обклеїти куб.

350. Розв'язування. Два прямокутники для основ із сторонами a і b , чотири прямокутники для бічної грані. З них два – із сторонами c і a та два – із сторонами c і b .

351. Розв'язування. Призма є прямою. Дві суміжні бічні грані перетинаються по прямій, перпендикулярній площині основи. Решта ребер паралельна даному ребру і, отже, теж перпендикулярні основі.

352. Розв'язування. Число ребер n -кутної призми $3n$, тому призми, що має 50 ребер, не існує, а 54 ребра має 18-кутна призма.

353. Розв'язування. Число сторін багатокутника, який лежить в основі, дорівнює числу бічних граней призми. З умови випливає, що це число дорівнює $n-2$, оскільки в призмі дві грані є основами. Таким

чином, в основі $(n-2)$ -кутник.

354. Відповідь: 1:27.

355. Відповідь: так.

356. Відповідь: ні.

357. Розв'язування. В основі лежать два паралелограми з рівними периметрами і площами, проте вони необов'язково рівні.

Відповідь: ні.

358. Вказівка. Зі всіх паралелограмів даного периметра найбільшу площу має квадрат.

Відповідь: 2 дм^3 .

359. Відповідь: як квадрати подібних сторін.

360. Розв'язування. З'єднаємо центр вписаного кола, точку O , з вершинами правильного п'ятикутника, одержимо рівнобедрені трикутники з кутами при вершині O , рівними 72° , висотою (опущеною на основу) 5 см і основою 10 см . Але трикутників з такими даними не існує: якщо допустити, що r і a задані вірно, то в умові задачі призма повинна бути правильною чотирикутною; якщо ж правильна п'ятикутна призма – вірна умова, то радіус r повинен бути

більшим $\frac{a}{2}$.

361. Відповідь: а) приблизно на 33%; б) приблизно на 9%.

362. Розв'язування. Наприклад, опустіть дане тіло в порожню циліндричну посудину, потім повністю заповнити його водою. Далі вийняти тіло з посудини, виміряти, на скільки знизився рівень води (h). Шуканий об'єм дорівнює Sh , де S – площа основи посудини.

382. Відповідь: 74° .

383. Відповідь: 30° .

384. Відповідь: 10 см , 4 см^2 .

385. Відповідь: $6\sqrt{3} \text{ см}$.

386. Розв'язування. Шукана відстань d дорівнює довжині висоти, опущеної з вершини рівнобедреного прямокутного трикутника на гіпотенузу, якою є бічне ребро.

Відповідь: $d=10 \text{ см}$.

387. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі слід повторити формули: $NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Відповіді:

До табл.7.

1) $h=2, k=\sqrt{7}, \beta=30^0$;

2) $b=4\sqrt{6}, h=3\sqrt{3}, k=2\sqrt{15}$;

3) $a=2\sqrt{3}, h=2\sqrt{3}, k=\sqrt{13}$;

4) $a=12, b=8, \beta=30^0$.

До табл.8.

1) $k=2, b=\sqrt{7}, \alpha=30^0$;

2) $a=2\sqrt{3}, k=\sqrt{2}, b=\sqrt{5}$;

3) $a=12, b=2\sqrt{13}, \alpha=30^0$;

4) $k=4, h=2\sqrt{3}, b=2\sqrt{7}$.

388. Вказівка. Перед розв'язуванням цієї задачі слід повторити

формули: $AC = a\sqrt{2}, AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, ON = \frac{a}{2}$.

Відповіді:

До табл.9

1) $k=2, b=\sqrt{5}, \alpha=60^0$;

2) $k=2, h=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}$;

3) $a=6\sqrt{3}, b=3\sqrt{7}, \alpha=30^0$;

4) $a=4\sqrt{3}, h=2, k=2\sqrt{7}$.

До табл.10.

1) $a=2\sqrt{2}, h=2\sqrt{3}, k=\sqrt{14}$;

2) $a=2\sqrt{2}, b=2\sqrt{2}, k=\sqrt{6}$

3) $a=4\sqrt{6}, k=2\sqrt{10}, \beta=30^0$;

4) $h=4\sqrt{3}, k=2\sqrt{14}, \beta=60^0$.

389. Відповідь: Q .

390. Відповідь: $4Q$.

391. Відповідь: $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$.

392. Вказівка. Перед розв'язуванням необхідно повторити

формули: $S_1 = \frac{Pk}{2}, P = 3a, S = S_1 + S_2, S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (S_2 – площа основи піраміди.)

Відповіді:

1) $k=10, P=15, S=75 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$;

2) $a=8, S_1=288, S=288 + 16\sqrt{3}$;

3) $a=11, P=33, S=297 + \frac{121\sqrt{3}}{4}$;

4) $a=15, k=14, S=315 + \frac{225\sqrt{3}}{4}$;

5) $a=4, P=12, k=33\sqrt{3}$.

393. Вказівка. Перед розв'язуванням слід повторити формули:

$$S_1 = \frac{Pk}{2}, P = 4a, S = S_1 + S_2, S_2 = a^2 \text{ (} S_2 \text{ - площа основи піраміди.)}$$

Відповіді:

1) $P = 24, S_1 = 144, S = 180$;

2) $P = 52, S_1 = 520, k = 20$;

3) $P = 36, a = 9, S = 369$;

4) $a = 11, k = 18, S = 517$;

5) $a = 8, p = 32, k = 22$.

394. Відповідь: 90° .

395. Відповідь: $3h$.

396. Розв'язування. У зрізаній піраміді основи є подібними багатокутниками, тобто відношення сторін верхньої і нижньої основ пропорційне. Півпериметр верхньої основи рівний 28 см, а сторони рівні x см і $28-x$ см. Тоді $\frac{27}{15} = \frac{28-x}{x}$.

Відповідь: 10 см, 18 см.

397. Розв'язування. Діагональними перерізами даної правильної зрізаної піраміди є рівнобедрені трапеції, сторони основ яких рівні $4\sqrt{2}$ см і $2\sqrt{2}$ см, а площа рівна: $S = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = 9\sqrt{2}$ (см³).

Відповідь: $9\sqrt{2}$ см³.

398. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі слід повторити формули: $CO = \frac{a}{\sqrt{3}}, C_1O_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}, ON = \frac{a}{2\sqrt{3}}, O_1N_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Відповіді до табл. 13.

Відповіді до табл. 14:

1) $h = 2\sqrt{6}, k = \sqrt{30}, \beta = 45^\circ$;

1) $a = 12, b = \sqrt{21}, h = 3$;

2) $b = 6, h = 3, k = \frac{3\sqrt{7}}{2}$;

2) $b = 13, h = 1, \alpha = 30^\circ$;

3) $a = 15, k = 2\sqrt{7}, \beta = 30^\circ$;

3) $b = \sqrt{15}, h = \sqrt{3}, k = \sqrt{3}$;

4) $a = 9, h = 3, k = \frac{\sqrt{39}}{2}$

4) $a = 15, b = 2\sqrt{21}, k = 4\sqrt{3}$.

399. Відповіді:

1) $k = 2, S_1 = 54, S = 54 + 45\sqrt{3}$;

2) $k = 5$, $S_1 = 100$, $S = 168$;

3) $k = 2$, $S_1 = 36$, $S = 36 + 30\sqrt{3}$.

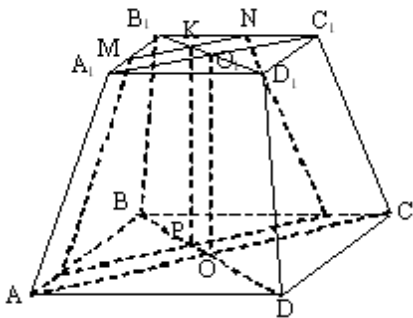
409. Вказівка. Вигляд з боку вершини: всі ребра видимі. Вигляд з боку основи: видно тільки ребра основи.

411. Розв'язування. За умовою $PH \perp ABC$, $PK \perp BC$, тобто за теоремою про три перпендикуляри $HK \perp BC$, і $PHK \perp PBC$. Оскільки, за умовою $TF \perp PBC$, то відрізок TF або паралельний площині PHK , або належить їй. У будь-якому випадку креслення невірне.

412. Розв'язування. Проведемо через пряму BD і дану точку M площину. Вона перетне грань ABK по прямій BE ($E \in KA$), а грань ADK по прямій ED . У побудованій площині BED проведемо через точку M пряму паралельно BD .

416. Вказівка. Чотирикутна піраміда має 8 ребер, якщо у неї «зрізати» кут при основі, то добавиться ще 3 ребра. Всього у многогранника буде 11 ребер.

420. Розв'язування. OO_1 – висота зрізаної піраміди, M і N – середини суміжних сторін (мал.150). MN перетинає діагональ B_1D_1 у точці K . Проведемо в площині діагонального перерізу BB_1D_1D пряму KP , паралельну висоті. Через точку P , яка лежить в площині нижньої основи, проведемо пряму, паралельну MN . Закінчуємо будувати переріз, сполучаючи точки, які лежать на бічних гранях.



Мал.150

422. Вказівка. Треба побудувати площину, паралельну загальній основі і віддалену від неї на висоту піраміди.

423. Вказівка. Наприклад, переріз, що проходить через висоту піраміди і медіану трикутника в основі.

424. Вказівка. Нехай a – сторона куба, тоді об'єм шуканої

піраміди $V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^2a$. Таким чином, треба побудувати піраміду, основа якої співпадає з гранню куба, а вершина лежить на протилежній грані.

425. Вказівка. Наприклад, збільшити висоту в 4 рази, а основу залишити без змін.

426. Вказівка. Наприклад, побудувати переріз площиною, що проходить через паралельні діагоналі основ.

433. Розв'язування. Висота піраміди проектується в центр кола радіуса R , описаного навколо основи, α – шуканий кут,
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

434. Розв'язування. Основа піраміди – правильний багатокутник. Оскільки бічні ребра рівні, то вершина проектується в центр основи, отже, піраміда – правильна.

435. Відповідь: може, якщо висота піраміди не проходить через основу піраміди.

436. Розв'язування. Половина діагоналі квадрата є катетом в прямокутному трикутнику, цей катет рівний $\frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$, а бічне ребро – гіпотенуза – дорівнює 7 см. Виходить, що катет більший за гіпотенузу.

437. Розв'язування. Кути α і β є гострими, оскільки лежать проти катета, рівного висоті піраміди, в прямокутних трикутниках. Гіпотенузами цих трикутників є бічне ребро і апофема бічної грані. Оскільки бічне ребро завжди більше апофеми, то $\sin \alpha < \sin \beta$, $\alpha < \beta$.

438. Відповідь: не може, оскільки ці прямокутники не подібні.

439. Розв'язування. Продовження бічних ребер не перетинаються в одній точці.

441. Розв'язування. Гострий кут бічної грані більше $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$, для $n=5$, $\alpha > 54^\circ$, тобто α не може бути рівне 50° .

442. Розв'язування. З умови $V_1=V_2$ де $V_1 = \frac{1}{3}S_1H_1$, $V_2 = \frac{1}{3}S_2H_2$,

тоді одержуємо, що $S_1H_1 = S_2H_2$, або $\frac{S_1}{S_2} = \frac{H_2}{H_1}$.

443. Розв'язування. Об'єми відповідних пірамід дорівнюють $V_1 = \frac{1}{3}S_1h_1$, $V = \frac{1}{3}Sh$, тоді $\frac{V}{V_1} = \frac{Sh}{S_1h_1}$. А оскільки площі перерізу S_1 і основи S пропорційні квадратам відповідних висот, то вірна рівність $\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{h_1^3}$.

444. Вказівка. Знайти об'єм тетраедра двічі, по черзі приймаючи ці грані за основу.

446. Вказівка. Сторони основи і висота вписаної піраміди в 2 рази менші сторін основи і висоти даної піраміди.

448. Вказівка. Дані чотири площини відтинають чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює висоті даної піраміди, а площа основи в 2 рази менша.

449. Розв'язування. $V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$ – формула для обчислення об'єму зрізаної піраміди. Щоб обчислити об'єм піраміди, припустимо, що $S_2=0$ (вершина піраміди) і одержимо $V = \frac{h}{3}S_1$. Для обчислення об'єму призми використаємо, що $S_2=S_1$, і одержимо $V = hS_1$.

450. Розв'язування. $V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{SS_1} + S_1) = \frac{SH}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \frac{S_1}{S}\right)$,

оскільки площі основ відповідних пірамід пропорційні квадратам відстаней від них до вершини, то має місце рівність

$$V = \frac{SH}{3}(1 + k + k^2).$$

453. Відповідь: $n+1$ вершин, $n+1$ граней, $2n$ ребер.

454. Розв'язування. Плоскі кути при вершині піраміди дорівнюють 60° , оскільки кожна бічна грань – рівносторонній трикутник. Отже, бічних граней менше, ніж 360° : $60^\circ=6$, тобто в основі може бути рівносторонній трикутник, квадрат або п'ятикутник.

455. Відповідь: $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ при $n=3$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ при $n=4$, $0^\circ < \alpha < 72^\circ$ при $n=5$, $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ при $n=6$.

456. Відповідь: може, якщо в основі – прямокутний трикутник.

458. Відповідь: а) не може, оскільки таку трапецію не можна вписати в коло; б) може тільки у випадку, якщо основа – квадрат.

459. Відповідь: $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

461. Відповідь: одне.

462. Відповідь: шість кутів.

463. Відповідь: 10, $n(n-5)$.

464. Відповідь: а) 1; б) 2; в) $n-3$.

465. Розв'язування. При вершині основи правильної зрізаної піраміди два кути в бічних гранях рівні α , а третій кут – кут правильного n -кутника $\beta = \frac{180^0(n-2)}{n}$. Сума двох кутів більша

третього: $2\alpha > \beta$, $\alpha > \frac{90^0(n-2)}{n}$. Для $n=4$, $\alpha > 45^0$, для $n=5$, $\alpha > 54^0$, для $n=6$, $\alpha > 60^0$. Отже, $\alpha = 45^0$ для $n=3$, $\alpha = 60^0$ для $n=3, 4, 5$.

Відповідь: а) для $n=3$; б) $n=3, 4, 5$.

466. Розв'язування. Об'єм другої піраміди дорівнює $\frac{2}{3}$ об'єму першої, тобто $210 \cdot \frac{2}{3} (\text{см}^3)$.

Відповідь: 140 см^3 .

467. Відповідь: $\frac{1}{6} abc$.

468. Відповідь: $\frac{1}{14} a^3 \sqrt{2}$.

469. Відповідь: $60\sqrt{3} \text{ см}^3$.

470. Розв'язування. Оскільки бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45^0 , то висота піраміди дорівнює стороні основи, тоді об'єм дорівнює $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 4\sqrt{3} (\text{см}^3)$.

Відповідь: $4\sqrt{3} \text{ см}^3$.

471. Розв'язування. Нехай V – об'єм призми, тоді об'єм зрізаної

піраміди $V_1 = \frac{1}{3}S \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{6}V = 20$, $V = 120$ (см³). Об'єм частини, що залишилася $V - V_1 = 120 - 20 = 100$ (см³).

Відповідь: 100 см³.

472. Відповіді: 1) $S = 12,25\sqrt{3}$, $V = \sqrt{3}$; 2) $S = 16\sqrt{3}$, $H=24$;

3) $a=10$, $V = \frac{500\sqrt{3}}{3}$, 4) $S = 36\sqrt{3}$, $a=12$; 5) $h=30$, $a=16$.

473. Відповіді: 1) $S=36$, $V=120$; 2) $S=81$, $h=12$; 3) $a=12$, $V=672$;
4) $a=10$, $h=100$; 5) $a=8$, $h=15$.

474. Відповідь: 175 см³.

475. Відповіді: 1) $S = 6,25\sqrt{3}$, $S_1 = 2,25\sqrt{3}$, $V = 36,75\sqrt{3}$;

2) $S = 4\sqrt{3}$, $S_1 = \sqrt{3}$, $h = 18$; 3) $a=6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$, $V = 95\sqrt{3}$;

4) $a = 4\sqrt{2}$, $a_1 = 2\sqrt{2}$, $V = 28\sqrt{3}$; 5) $a = 6\sqrt{5}$, $a_1 = 4\sqrt{5}$, $h = 9\sqrt{3}$.

476. Розв'язування. Площа основи при відомих об'ємі та висоті піраміди визначається однозначно, а значить, однозначно визначається і правильний п'ятикутник, що лежить в основі.

Відповідь: одну.

477. Відповідь: ні.

478. Розв'язування. Об'єми зрізаної і даної пірамід пропорційні кубам відстаней від вершин до основ, тому переріз треба провести на відстані $\frac{h}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,8h$ від вершини.

479. Розв'язування. Менша зрізана частина – це трикутна піраміда, у якій три ребра взаємно перпендикулярні і рівні $\frac{a}{2}$, тому її

об'єм дорівнює $\frac{a^3}{24}$.

480. Відповідь: збільшиться в 2 рази.

482. Відповідь: сторони основ і бічне ребро.

511. Відповідь: $\frac{\pi}{4}a^3$.

512. Відповідь: 4:9.

513. Відповідь: πa^3 .

514. Відповідь: 150π см³.

516. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі повторіть формули:

$$S_{\text{біч}} = 2\pi rh, \quad S_{\text{осн}} = \pi r^2, \quad S = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}, \quad V = \pi r^2 h.$$

Відповіді:

1) $S_{\text{осн}}=25\pi$, $S_{\text{біч}}=70\pi$, $S=120\pi$, $V=175\pi$.

2) $h=5$, $S_{\text{осн}}=16\pi$, $S=72\pi$, $V=80\pi$

3) $r=2$, $S_{\text{біч}}=44\pi$, $S=52\pi$, $V=44\pi$

4) $r=8$, $S_{\text{осн}}=64\pi$, $S_{\text{біч}}=320\pi$, $S=448\pi$.

518. Вказівка. Цей переріз проходить через середину висоти циліндра паралельно основам.

519. Вказівка. Для побудови зображення такого циліндра потрібно радіус даного циліндра збільшити в 2 рази.

520. Вказівка. Умову задачі задовольняє будь-який циліндр, радіус основи якого дорівнює 2 од.

523. Розв'язування. Позначимо сторони прямокутника a і b , тоді об'єми циліндрів, утворених в результаті обертання прямокутника навколо кожної з цих сторін, дорівнюють $V_1 = \pi a^2 b$, $V_2 = \pi b^2 a$, а відношення $V_1:V_2=a:b$.

524. Розв'язування. Нехай перерізами двох рівносторонніх циліндрів є квадрати із сторонами a і b відповідно, тоді їх об'єми рівні

$$V = \frac{\pi a^3}{4} \text{ і } V = \frac{\pi b^3}{4}, \text{ а відношення } V_1:V_2=a^3:b^3.$$

525. Розв'язування. Позначимо за r_1 і r_2 – радіуси, а за h_1 і h_2 – висоти двох циліндрів. Тоді з умови рівності площ бічних поверхонь випливає, що $2\pi r_1 h_1 = 2\pi r_2 h_2$, $r_1 h_1 = r_2 h_2$. Знайдемо відношення їх об'ємів:

$$V_1:V_2 = \pi r_1^2 h_1 : \pi r_2^2 h_2, \text{ або } V_1:V_2 = r_1 \cdot r_1 h_1 : r_2 \cdot r_2 h_2 = r_1 : r_2.$$

526. Розв'язування. Нехай r , h – радіус основи і висота циліндра. З умови $S_{\text{біч}} = 2S_{\text{осн}}$, $2\pi rh = 2\pi r^2$, або $r = h$. Тому $V = \pi r^2 h = \pi r^3$. Звідси випливає, що відношення об'ємів даних циліндрів дорівнює відношенню кубів їхніх висот.

527. Розв'язування. Нехай V_1 , V_2 – об'єми даних циліндра і куба, тоді $V_1 = \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi}{4} a^3 \approx 0,8a^3 = 0,8V_2$.

528. Розв'язування. Об'єми циліндра і призми рівні: $V_{\text{цил.}} = \pi r^2$, $V_{\text{призми}} = r^2 h$, $V_{\text{цил.}} = V_{\text{призми}}$, $\pi = \frac{22}{7} \cdot \frac{22}{7}$ – число Архімеда, який у

середині III ст. до н.е. довів, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

529. Розв'язування. Об'єм початкового циліндра обчислюється за формулою $V = \pi r^2 h$, де r – радіус основи, h – висота циліндра. Об'єм перетвореного циліндра обчислюється за формулою $V = \pi(2r)^2 \frac{h}{4}$ і дорівнює об'єму початкового циліндра.

530. Розв'язок: $V = \pi r^2 h = 2\pi r h \cdot \frac{r}{2} = S_{\text{біч}} \cdot \frac{r}{2}$.

532. Відповідь: а) у 2, 3, ..., n разів; б) у $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}$ разів.

533. Відповідь: 1:8; 1:27; $1:n^3$.

534. Вказівка. Уявимо, що з двох частин склали циліндр. Його об'єм знаходиться множенням площі поперечного перерізу на висоту.

535. Відповідь: 2:3.

536. Вказівка. Об'єм одержаного тіла дорівнює різниці об'ємів двох циліндрів, висота яких однакова і дорівнює стороні квадрата. Більший радіус дорівнює відстані від осі обертання до паралельної їй дальньої сторони квадрата, інший – дорівнює відстані від осі обертання до паралельної їй ближньої сторони квадрата.

537. Відповідь: $V = \pi h(R^2 - r^2)$.

538. Відповідь: друга.

539. Відповідь: як квадрати радіусів; як висоти.

540. Відповідь: ні.

552. Відповідь: $72\pi \text{ см}^3$.

553. Відповідь: $\frac{7}{3}\pi \text{ дм}^3$.

554. Розв'язування. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. З умови $h=r$ і $r=9$, тоді $V=9\pi$.

Відповідь: $9\pi \text{ м}^3$.

555. Відповідь: а) $\frac{1}{3}\pi a^3$; б) $\frac{1}{3}\pi R^3$; в) $\frac{1}{3}\pi H^3$.

556. Відповідь: $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$.

557. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі доцільно повторити

формули: $S_{\text{біч}} = \pi r l$, $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, $S = S_{\text{біч.}} + S_{\text{осн.}}$, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Відповіді:

1) $l=5$, $S_{\text{біч}}=20\pi$, $S=36\pi$, $V=16\pi$.

2) $h=5$, $S_{\text{біч.}}=15\pi$, $S=24\pi$, $V=12\pi$

3) $h=8$, $l=10$, $S=96\pi$, $V=96\pi$

4) $r=8$, $h=12$, $l=13$, $V=100\pi$.

558. Відповідь: $96\pi \text{ см}^3$.

559. Відповідь: $\approx 2 \text{ дм}$.

560. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі доцільно повторити формули: $S_{\text{біч}} = \pi(R+r)l$, $S = S_{\text{біч.}} + \pi R^2 + \pi r^2$, $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Відповіді:

1) $l=5$, $S_{\text{біч}}=25\pi$, $S=42\pi$, $V=28\pi$.

2) $h=3$, $l=5$, $S=80\pi$, $V=52\pi$.

3) $R=10$, $S_{\text{біч.}}=195\pi$, $S=320\pi$, $V=700\pi$.

574. Вказівка. Для побудови зображення конуса потрібно висоту і радіус основи даного конуса збільшити в 2 рази.

575. Вказівка. Січна площина проходить через середину висоти даного конуса, паралельно основі і перерізає конус по кругу радіуса

$$r = \frac{R}{2}.$$

577. Вказівка. Об'єм конуса пропорційний кубу радіуса його основи.

578. Розв'язування. Об'єми двох заданих конусів дорівнюють $V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h$ і $V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h$, а їх відношення $V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2$.

579. Розв'язування. При обертанні квадрата утворюється циліндр, об'єм якого обчислюється за формулою $V = \pi a^3$, де a – сторона квадрата. При обертанні трикутника BCD утворюється конус, радіус основи і висота якого дорівнюють стороні квадрата, а об'єм $V_1 = \frac{1}{3} \pi a^3$. При обертанні трикутника ABD утворюється тіло, об'єм якого дорівнює різниці об'ємів циліндра і конуса: $V_2 = \pi a^3 - \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3$. Таким чином, об'єм цього тіла в 2 рази

більший об'єму конуса.

580. Розв'язування. Об'єми рівносторонніх конусів: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$ і

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$, тобто $r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$. Оскільки в умові не сказано, що $h_1 = h_2$,

то і про радіуси не можна сказати, що вони рівні.

582. Розв'язування. Оскільки твірна нахилена до площини основи під кутом 45° , то висота зрізаного конуса $h = R - r$, тоді

$$V = \frac{1}{3}\pi(R-r)(r^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}(R^3 - r^3).$$

583. Відповідь: $V = \frac{1}{12}\pi d^2 h$.

584. Розв'язування. Позначимо катети даного трикутника через a і b , по умові $a \neq b$. Об'єм одного конуса дорівнює $V_1 = \frac{1}{12}\pi a^2 b$, іншого

– $V_2 = \frac{1}{12}\pi b^2 a$. Припустимо, що їх об'єми рівні: $\frac{1}{3}\pi a^2 b = \frac{1}{3}\pi b^2 a$,

звідси випливає, що $a = b$. Дійшли до протиріччя з умовою задачі. Отже, об'єми не рівні.

585. Вказівка. Нехай a, b – сторони верхньої і нижньої основ даної трапеції ($a > b$), h – висота. Тіло, утворене в результаті обертання навколо більшої сторони, утворюється з циліндра, радіус основи якого h , а висота b , і двох конусів, у кожного з яких радіус основи дорівнює

h , а висота – $\frac{a-b}{2}$. Тіло, утворене в результаті обертання навколо

меншої сторони, утворюється з такого ж циліндра, і двох тіл, об'єм кожного з яких в два рази більший, ніж об'єм конуса з висотою $\frac{a-b}{2}$ і радіусом основи h .

586. Розв'язування. Нехай площа основи конуса дорівнює S , тоді об'єм конуса обчислюється за формулою $V_1 = \frac{1}{3}Sh$, а об'єм

одержаного циліндра – $V_2 = Sx$, оскільки їх об'єми рівні, то

$\frac{1}{3}Sh = Sx$; $x = \frac{h}{3}$: висота циліндра в три рази менше висоти конуса.

587. Відповідь: у 216 разів.

588. Розв'язування. Позначимо за x радіус основи конуса. Об'єми зрізаного конуса і конуса дорівнюють: $\frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$,

$$x = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}.$$

593. Відповідь: 1000 кульок, 20 см.

594. Відповідь: 216.

595. Вказівка. Циліндр має об'єм $2\pi R^3$, куля найбільшого радіуса $-\frac{4}{3}\pi R^3$. Об'єм матеріалу, що пішов у відходи, дорівнює $\frac{2}{3}\pi R^3$, що у

відсотках дорівнює: $\frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$.

596. Відповідь: 4:3.

597. Відповідь: 3 дм.

598. Відповідь: а) $\frac{\pi}{6}a^3$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a^3$.

599. Відповідь: $\frac{4000}{3}\pi$ см³.

600. Відповідь: 16 см³.

601. Відповідь: 75π см².

602. Відповідь: $\approx 2,8$.

603. Відповідь: ≈ 5 см.

604. Відповідь: $4Q$.

605. Відповідь: $4Q$.

606. Відповідь: $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$.

607. Відповідь: 2:3.

608. Вказівка. Перед розв'язуванням задачі корисно повторити формули: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Відповіді: 1) $S=36\pi$, $V=36\pi$, 2) $R=6$, $V=288\pi$, 3) $R=15$, $S=900\pi$.

617. Вказівка. Радіус шуканої кулі дорівнює половині радіусу даної кулі.

618. Вказівка. Висота зрізаного конуса дорівнює $4(R-r)$.

619. Вказівка. Радіус кулі дорівнює радіусу основи циліндра.

620. Вказівка. Шуканий конус має, наприклад, радіус основи, що

дорівнює радіусу кулі, а висоту в чотири рази більше за цей радіус.

622. Вказівка. Радіус кулі $R=3$ од.

624. Вказівка. Радіус шуканої сфери дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника з катетами R_1 і R_2 .

6256. Вказівка. Розділити кулю на 8 частин трьома взаємно перпендикулярними площинами, які проходять через центр сфери.

631. Розв'язування. Площа поверхні однієї восьмої частини кулі дорівнює $\frac{\pi R^2}{2}$. Крім того, вона обмежена трьома чвертями кругів

найбільшого радіусу, їх площа дорівнює $\frac{3\pi R^2}{4}$. Площа поверхні

кожного з восьми тіл дорівнює $\frac{5\pi R^2}{4}$, а площа поверхні кулі – $4\pi R^2$,

відношення утворює 5:16.

636. Відповідь: краще з'їсти кавун увісьмох.

637. Вказівка. Повинна виконуватися умова $V_{кулі} = \frac{1}{2}V_{цил.}$. Якщо радіус основи циліндра дорівнює a , радіус кулі r , то по умові $\frac{4}{3}r^3 = a^3$, $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}a$. Оскільки $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} < 1$, то $r < a$, тому куля поміститься у циліндр.

638. Відповідь: перший кавун важчий за другий в 8 разів.

639. Відповідь: так.

644. Відповідь: а) збільшиться в 4 рази; б) зменшиться на $\frac{7}{16}S$.

645. Відповідь: ні.

646. Вказівка. Зі всіх тіл даного об'єму куля має мінімальну площу поверхні.

647. Відповідь: $V = \frac{1}{3}R \cdot S$, $S = \frac{3V}{R}$.

648. Відповідь: на нікелювання однієї кулі.

Навчальне видання
Бібліотека журналу «Математика в школах України»
Випуск 2(146)

Дмитро Тимофійович Белешко
Микола Антонович Віднічук
Олександр Васильович Крайчук

Усні вправи із стереометрії

Навчальний посібник

Головний редактор І.С. Маркова
Редактор Г.О. Новак
Коректо О.М. Журенко
Комп'ютерне верстання О.В. Лебедева

Підписано до друку 13.02.2015 р. Формат 60х90/16. Папір офсет.
Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 7,0. Наклад 300 пр.
Зам. №15-02/16-04.

ТОВ «Видавнича група «Основа»».
Україна, 61001, Харків, вул. Плехановська, 66; тел.: (057) 731-96-32;
e-mail: math@osnova.com.ua

Віддруковано з готових плівок ПП «Триада Принт»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1870 від 16.07.2007 р.
Харків, вул. Киргизька, 19, тел. (057)57-98-16, 757-98-15.